Diskret matematikk, 23. februar 2010, løsningsforslag

Oppgave 1

a) Dette kan vises på flere måter.

1) Direkte bevis: $\neg(r \to (p \vee q))$ er sann hvis $r \to (p \vee q)$ er usann, og det er tilfellet hvis r er sann, p er usann og q er usann. Dermed ikke selvmotsigelse.

2) Bruk av formler: $\neg(r \to (p \vee q)) \equiv \neg(\neg r \vee p \vee q)$ $\equiv r \wedge \neg p \wedge \neg q$. Dermed blir dette sant hvis r er sann, p er usann og q er usann. Altså ikke selvmotsigelse.

3) Sannhetsverditabell:

p	q	r	$p \vee q$	$r \to (p \vee q)$	$\neg(r \to (p \vee q))$
S	S	S	S	S	U
S	S	U	S	S	U
S	U	S	S	S	U
S	U	U	S	S	U
U	S	S	S	S	U
U	S	U	S	S	U
U	U	S	U	U	S
U	U	U	U	S	U

Vi ser av tabellen at $\neg(r \to (p \vee q))$ ikke er en selvmotsigelse.

b) i) For alle m finnes det en n slik at $m > n$.
Sant fordi vi f.eks. kan velge n lik $m-1$.

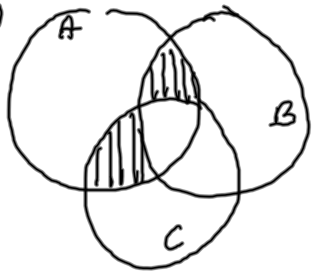
ii) De finnes en m slik at for alle n har vi $m > n$.
Usant fordi da måtte m være større enn alle heltall.

iii) For alle m og alle n har vi at $m > n$.
Usant siden dette f.eks. ikke gjelder for $m = 1$ og $n = 2$.

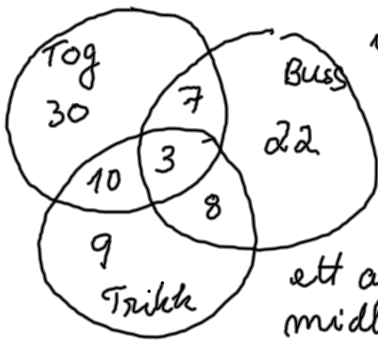
iv) De finnes en m og en n slik at $m > n$.
Sant. Velg f.eks. $m = 2$ og $n = 1$.

Oppgave 2

a)



b)



i) Legger vi sammen finner vi at det er 89 personer som bruker minst ett av de tre transportmidlene. Dermed 1 som ikke bruker noen av dem.

ii) Det er 30 som kun bruker tog.

Oppgave 3

a) $f(22) = 22 \bmod 11 = 0$, $f(23) = 23 \bmod 11 = 1$,
$f(33) = 33 \bmod 11 = 0$.

$g(22) = 22 \operatorname{div} 11 = 2$, $g(23) = 23 \operatorname{div} 11 = 2$,
$g(33) = 33 \operatorname{div} 11 = 3$.

b) $V_f = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ siden resten en får når et heltall deles med 11, kan og vil bli et av tallene fra 0 til 10.
La $n \geq 0$. Da vil $g(m) = n$ hvis $m = 11n$. Dermed blir $V_g = A$.

c) f er ikke en til en siden $f(22) = f(33) = 0$.
f er ikke på siden V_f er forskjellig fra A.
g er ikke en til en siden $g(22) = g(23) = 2$
g er på siden $V_g = A$.

Oppgave 4

$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Oppgave 5

a) Det finnes $2^8 = 256$ forskjellige bitsekvenser med lengde 8.

b) Det finnes $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ bitsekvenser med nøyaktig tre 0-biter

c) Det finnes $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + \binom{8}{0}$
$= 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ bitsekvenser med flere 0-biter enn 1-biter.

Oppgave 6

a) $a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 - 0 = 3$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 9 - 2 = 7$

b) Karakteristisk polynom: $r^2 = 3r - 2$, $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Løsninger: $r = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$

Generell løsning: $a_n = \alpha 2^n + \beta$

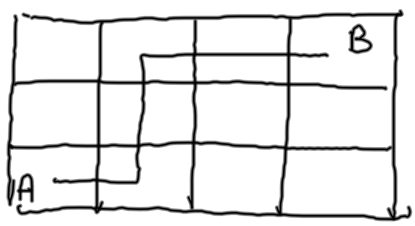
$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{array}\right\} \quad \alpha = 1, \ \beta = -1$$

Løsning: $a_n = 2^n - 1$

c) $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$

Oppgave 7

a)



b) $\binom{5}{2} = 10$ c) $\binom{m+n-2}{n-1}$

Oppgave 8

a)

218	2
109	0
54	1
27	0
13	1
6	1
3	0
1	1
0	1

$$128_{10} = 11011010_2$$

$$= \underbrace{(1101)}_{D}\underbrace{(1010)}_{A}{}_2 = DA_{16}$$

b) $ABC_{16} = 1010\,1011\,1100_2$

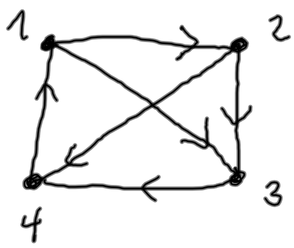
$$= \underbrace{(101)}_{5}\underbrace{(010)}_{2}\underbrace{(111)}_{7}\underbrace{(100)}_{4}{}_2$$

$$= 5274_8$$

c) $101101_2 = 32+8+4+1 = 45$

Oppgave 9

a) Grafen G_R:



Matrisen til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R er ikke transitiv siden f.eks. $(1,3) \in R$ og $(3,4) \in R$, men $(1,4) \notin R$.

b) $(1,3), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (4,2), (4,3)$

c) Her kan vi bruke c) siden det vil stå 1 på plass (a,b) i $M_R \odot M_R$ hvis og bare hvis det går en vei med lengde 2 fra a til b.

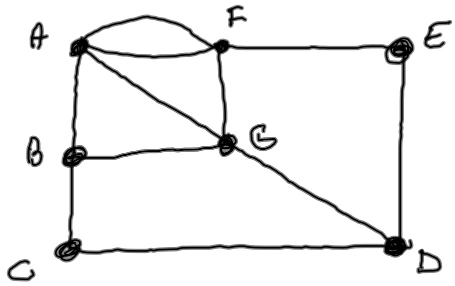
$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 10

a) grad (A) = 3, grad (B) = 3, grad (C) = 2, grad (D) = 3, grad (E) = 2, grad (F) = 3, grad (G) = 4.

b) Grafen har fire punkter med odde grad. Da finnes det ingen hverken lukket eller ikke-lukket Euler-vei. I såfall måtte grafen enten ha ingen punkter med odde grad eller nøyaktig to punkter med odde grad.

c) Hvis vi setter på en ekstra kant mellom f.eks. A og F, dvs. slik:



Så vil B og D få odde grad og alle de andre partallsgrad. Dermed får vi en ikke-lukket Euler-vei. Veien må starte i ett av de to punktene med odde grad og ende i det andre. F.eks. slik:

B – C – D – E – F – A – B – G – A – F – G – D