høgskolen i oslo

AVDELING FOR INGENIØRUTDANNING

EKSAMENSOPPGAVE

Emne:		Emnekode:	Fagansvarlig:
Diskret matematikk		**FO 019A**	**Ulf Uttersrud**
Gruppe(r):		Dato: **23.11.2006**	Eksamenstid: **9 - 14**
Eksamensoppgaven består av:	Antall sider (inkl. forsiden): **4**	Antall oppgaver: **10**	Antall vedlegg: **0**
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne hjelpemidler samt håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst		

Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
Ulf Uttersrud	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	

Alle oppgaver teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! For eksempel ved å ta med mellomregninger eller ved å gi annen form for argumentasjon.

Oppgave 1

La p, q og r være logiske utsagn.

i) Avgjør om $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ og $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$ er logisk ekvivalente.

ii) Finn sannhetsverdier for p, q og r slik at $p \vee \neg q \vee \neg r$ blir usann.

iii) La m og n være positive heltall og la $P(m,n)$ være utsagnet: $m \cdot n > (m+n)$.
Er $P(2,3)$ sann? Er $P(1,3)$ sann? Gitt utsagnene $\forall m \forall n\ P(m,n)$, $\exists m \forall n\ P(m,n)$, $\forall m \exists n\ P(m,n)$ og $\exists m \exists n\ P(m,n)$. Hvem av dem er sanne og hvem er usanne? Begrunn svarene!

Oppgave 2

i) La mengdene A og B være gitt ved $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{c, d, e, f\}$.
Finn mengdene $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $(A \cup B) - (A \cap B)$ og $(A - B) \cup (B - A)$.

ii) La A, B og C være vilkårlige delmengder i en universalmengde U. Tegn et Venn-diagram og skravér mengden:

$$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

Oppgave 3

La A være mengden alle permutasjonene av tallene 1, 2, 3 og 4. La videre B være de positive heltallene. Definér funksjonen $f : A \to B$ ved at for hver $p \in A$ skal $f(p)$ være summen av første og siste tall i permutasjonen p. Hvis for eksempel $p = (2, 1, 4, 3)$ er $f(p) = 2 + 3 = 5$ og hvis $p = (4, 3, 1, 2)$ er $f(p) = 4 + 2 = 6$.

i) Hva blir $|A|$, dvs. hvor mange elementer har A?

ii) Finn verdimengden V til f. Begrunn svaret!

iii) Finn mengden $X = \{p \in A \mid f(p) = 5\}$ og finn $|X|$.

iv) Er f en til en? Er f på? Begrunn svarene!

Oppgave 4

i) Tallet $a = 2624_{10}$ er gitt på desimal form. Finn tallet på binær form.

ii) Tallet $b = ABCDEF_{16}$ er gitt på heksadesimal form. Finn tallet på binær form.

iii) Finn summen $\sum_{k=0}^{4} 5\cdot 8^k \;=\; 5+5\cdot 8+5\cdot 8^2+5\cdot 8^3+5\cdot 8^4$ ved å bruke formelen for summen av en geometrisk rekke.

vi) Tallet $c = 101101101101101_2$ er gitt på binær form. Finn tallet på oktal form, på heksadesimal form og på desimal form.

Oppgave 5

Nedenfor står de syv første leddene i tre forskjellige følger. La $\{a_n\}$ være følgen i punkt *a)*, $\{b_n\}$ følgen i punkt *b)* og $\{c_n\}$ følgen i punkt *c)*. Vi har $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ og $c_0 = 1$. Finn a_7, b_7 og c_7. Finn formeler for a_n , b_n og c_n .

a) 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , ...
b) 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , ...
c) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , ...

Oppgave 6

i) Gitt differensligningen $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$. Finn a_3 , a_4 , a_5 og a_6 .

ii) Hvor mange bitsekvenser med lengde 6 inneholder nøyaktig tre 1–biter?

iii) Hvor mange bitsekvenser med lengde 6 inneholder nøyaktig tre 1–biter der de tre 1–bitene **ikke** står på rad? For eksempel har 0, 1, 0, 1, 1, 0 tre 1–biter og de står ikke på rad, mens 0, 0, 1, 1, 1, 0 har tre 1–biter på rad. Begrunn svaret! (Hint: Finn først de som har tre 1–biter på rad.)

iv) Vi ser nå på vilkårlige bitsekvenser med lengde 6. Hvor mange slike er det som ikke har tre 1-biter på rad? Begrunn svaret!

Oppgave 7

Gitt tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

i) Finn matrisen A^2.

ii) Finn en 3 x 3 – matrise B slik at $AB = I$.

iii) Bruk induksjon til å vise at for alle $n \geq 1$ er $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$, $a_0 = 3,\ a_1 = 5$. Finn a_2 og a_3. Finn en formel for a_n og finn a_4 ved å sette inn i denne formelen.

Oppgave 9

La $A = \{a, b, c\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$.

i) Finn matrisen M til relasjonen R.

ii) Finn det logiske matriseproduktet $M \odot M$.

iii) Finn matrisen $N = M \vee (M \odot M) \vee (M \odot M \odot M)$. (Teorien sier at N er matrisen til den transitive tillukningen til relasjonen R.)

Oppgave 10

La $A = \{2,3,4,5,6\}$ og R relasjonen på A gitt ved $R = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A,\ \gcd(a,b) = 1\}$. Husk at $\gcd(a,b)$ betyr største felles divisor for a og b (eng: greatest common divisor). Vi sier også at a og b er innbyrdes primiske hvis $\gcd(a,b) = 1$ (eng: relatively prime).

i) Sett opp R som en samling tallpar.
ii) Tegn grafen til R.
iii) Finn matrisen til R.
iv) Er R refleksiv? Er R symmetrisk? Er R transitiv? Begrunn svarene!