AVDELING FOR INGENIØRUTDANNING

EKSAMENSOPPGAVE

Emne:		Emnekode:	Faglig veileder:
Diskret matematikk		**FO 019A**	Ulf Uttersrud
Gruppe(r):		Dato: **12.12.2005**	Eksamenstid: **9 - 14**
Eksamensoppgaven består av:	Antall sider (inkl. forsiden): **5**	Antall oppgaver: **14**	Antall vedlegg: **0**
Tillatte hjelpemidler:	Alle skriftlige – både trykte og håndskrevne, samt alle typer lommekalkulatorer, er tillatt		

Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse): Annen lærer	Sensor:	Studieleder/ Fagkoordinator	Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
Ulf Uttersrud		Roy Istad		

Avdeling for ingeniørutdanning • Cort Adelersgate 30 • 0254 Oslo • tlf: 22 45 32 00 • faks: 22 45 32 05 • iu@hio.no

De 14 oppgavene teller likt. Det er ikke slik at de lette oppgavene kommer først og de vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden på en ny oppgave.

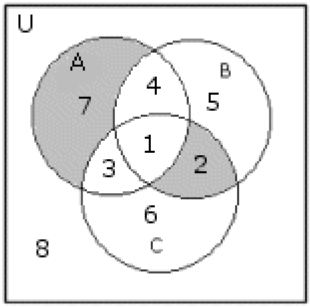
Alle svar skal begrunnes! For eksempel ved å ta med mellomregninger eller ved å gi annen form for argumentasjon.

Oppgave 1

Gitt de fire logiske utsagnene $s = (p \vee r) \wedge q$, $u_1 = p \wedge q \wedge r$, $u_2 = p \wedge q \wedge \neg r$ og $u_3 = \neg p \wedge q \wedge r$. Er utsagnet s logisk ekvivalent med utsagnet $u_1 \vee u_2 \vee u_3$?

Oppgave 2

La A, B og C være vilkårlige delmengder i en universalmengde U. På tegningen under er U delt opp i åtte disjunkte delmengder nummerert fra 1 til 8:



For eksempel er delmengde nr. 2 (et grått område) gitt ved $\overline{A} \cap B \cap C$ og delmengde nr. 7 (også et grått område) gitt ved $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. De åtte delmengdene er gitt ved

a) $A \cap B \cap C$, b) $A \cap B \cap \overline{C}$, c) $A \cap \overline{B} \cap C$, d) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,
e) $\overline{A} \cap B \cap C$, f) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, g) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, h) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

i) Sett opp hvilken bokstav som hører til hvilket nummer for alle de åtte delmengdene. For eksempel hører e) til 2 og d) til 7.

ii) Lag et Venn-diagram der du skraverer mengden

$$D = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

Skriv så mengden D på en så enkel form som mulig.

Oppgave 3

Gitt tallmatrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kun to av matriseproduktene AB, AC, BA, BC, CA og CB er definert. Regn ut de to som er definert.

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi bruke to-komplement, fortegnsbit og 8 biter som fast lagringsformat for heltall. Det betyr at et tall er negativt hvis og bare hvis første (fra venstre) siffer/bit er 1.

La heltallene a og b være gitt ved a = 00110010 og b = 01010000.

i) Sett opp hva både a og b blir på heksadesimal form, på oktal form og på desimal form.

ii) Finn $c = a + b$ ved binær addisjon. Resultatet c blir et negativt tall. Hva blir tallet på desimal form?

iii) Finn et heltall x fra tallmengden {–128, –127, ... , 125, 126, 127} slik at $130 \equiv x$ (mod 256).

Oppgave 5

La $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{1,2,3,4\}$. Definer funksjonen $g : A \to B$ ved $g(a) = 2$, $g(b) = 3$, $g(c) = 4$ og $g(d) = 1$. Definer funksjonen $f : B \to A$ ved $f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = d$ og $f(4) = a$. Lag tegninger av f og g. Er g en til en ? Er g på ? Er f en til en ? Er f på ? La funksjonen $h : A \to A$ være definert som sammensetningen av f og g, dvs. $h = f \circ g$. Hva blir $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ og $h(d)$? Tegn h. Er h en til en? Er h på ?

Oppgave 6

En forening skal bruke et heltall med fem siffer som medlemsnummer. Det første av de fem sifrene skal hentes fra {1, 2, 3, 4, 5} og hvert av de fire neste sifrene skal hentes fra {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Samme siffer kan brukes flere ganger. Heltallene 20512 og 43040 er to eksempler på mulige medlemsnummer, mens 01234 og 54623 er to ulovlige medlemsnummer.

i) Hvor mange mulige medlemsnummer av denne typen finnes det?

Foreningen opplever ofte at medlemsnummer feilskrives. En vanlig feil er at ett av sifrene er galt, mens de andre er korrekte. En annen vanlig feil er at to siffer bytter plass. Dette kan man sjekke ved å innføre et kontrollsiffer. Dvs. medlemsnummeret får et ekstra siffer (et sjette siffer). La a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 være de fem sifrene i et medlemsnummer. Et kontrollsiffer x hentes fra {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} og bestemmes slik at flg. ligning oppfylles:

$$*) \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 \equiv x \text{ (mod 7).}$$

ii) La x være kontrollsifferet som hører til tallet 20512. Dvs. at medlemsnummeret nå blir $20512x$. Finn x og sjekk at hvis vi bytter om tredje og fjerde siffer i dette nummeret, dvs. lager nummeret $20152x$, vil dette ikke oppfylle ligningen *) .

Oppgave 7

La påstanden P_n være definert ved: $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$.

i) Vis at påstanden P_n er sann for $n = 1, 2$ og 3.

ii) Sett opp de seks første radene i Pascals trekant og bruk det til å finne koeffisienter *a*, *b*, *c* og *d* slik at

$$(n+1)^5 = n^5 + a\,n^4 + b\,n^3 + c\,n^2 + d\,n + 1 \quad \text{for alle } n.$$

iii) Vis ved hjelp av induksjon at påstanden P_n er sann for alle $n \geq 1$. Avgjør om påstanden $n^5 - n \equiv 0 \pmod{10}$ er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 6$. Finn a_2 og a_3. Finn en formel for a_n og finn a_5 ved å sette inn i denne formelen.

Oppgave 9

Et passord til et datasystem skal inneholde nøyaktig 8 tegn. Lovlige tegn er de 26 bokstavene A – Z og sifrene 0 – 9. Passordet skal starte og slutte med en bokstav. Hvor mange forskjellige passord av denne typen finnes det? Både her og i de neste spørsmålene, holder det å sette opp et regneuttrykk som svar. De eksakte tallsvarene kan bli svært store og du trenger ikke å regne dem ut. Hvor mange passord av denne typen vil inneholde like mange bokstaver som siffer? Hvor mange passord av denne typen vil inneholde flere bokstaver enn siffer?

Oppgave 10

I en gruppe på 100 IT-studenter var det 48 som kunne web-programmering ved hjelp av PHP, 47 som kunne det ved hjelp av JSP og 42 kunne det ved hjelp ASP.NET. Det var 3 stykker som kunne alle de tre teknologiene, det var 13 som kunne både PHP og JSP, 18 som kunne både JSP og ASP.NET og 10 som kunne både PHP og ASP.NET. Hvor mange av de 100 IT-studentene kunne ingen av de tre teknologiene? Hvor mange kunne både PHP og ASP.NET, men ikke JSP ? Hvor mange kunne bare ASP.NET ?

Oppgave 11

Gitt de logiske matrisene $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Finn $A \vee B$, $A \wedge B$ og $A \odot B$. Obs: $A \odot B$ betyr det logiske matriseproduktet.

Oppgave 12

Gitt matrisen $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og mengden $A = \{a, b, c, d\}$. La R være den relasjonen på A som har M som tilhørende matrise.

i) Sett opp relasjonen R som en samling par, dvs. som en delmengde av $A \times A$ og tegn dens graf G.

ii) Finn matrisen $M \odot M$.

iii) Sett opp, ved f.eks. å studere grafen G, alle par (x, y) der $x \in A$ og $y \in A$ som er slik at det går en vei med lengde 4 fra x til y. Bruk det til å sette opp matrisen $M \odot M \odot M \odot M$, dvs. uten å regne ut matriseproduktet.

Oppgave 13

La $A = \{a, b, c, d\}$ og la R være relasjonen på A gitt ved $R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$.

i) Tegn grafen til R.

ii) La S være den refleksive tillukningen til R. Tegn grafen til S.

iii) La T være den symmetriske tillukningen til S. Tegn grafen til T .

iv) La U være den transitive tillukningen til T . Tegn grafen til U .

Oppgave 14

La x, y og z være boolske variabler.

i) Skriv det boolske uttrykket $(x + z)y$ som en sum av minimumsledd.

ii) Skriv den boolske funksjonen $f(x, y, z) = x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z$ på en så enkel form som mulig.