Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 10. desember 2018

Tid: 09:00 – 12:00

Antall sider (inkl. forside):

Antall oppgaver: 6

Tillatte hjelpemidler: Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.

Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Eva Hadler Vihovde

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Studieleders underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Studieleder	

Emnekode: DAPE 1300

Oppgave 1

a) La P og Q være to utsagnfunksjoner der

P(x): x skal ta eksamen.

Q(x): x er syk.

Skriv følgende utsagn ved hjelp av *P(x), Q(x),* kvantorer og logiske operatorer:

i) *Ola skal ta eksamen, men han er syk.*

ii) *Hvis Ola er syk så skal han ikke ta eksamen.*

iii) *Det finnes noen som er friske, men som likevel ikke skal ta eksamen.*

iv) *For alle er det slik at det er tilstrekkelig å være frisk for å kunne ta eksamen.*

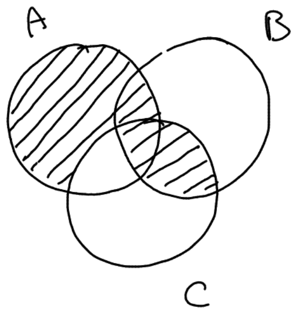
v) *Alle skal ta eksamen, bare hvis de er friske.*

b) La A, B og C være vilkårlige mengder.

i) Tegn Venn-diagram og skraver mengden:

$$A \cap ((B - C) \cup (C - B))$$

ii) Finn en mengdeformel med A, B og C for det skraverte området i Venn-diagrammet:



Oppgave 2

a) La $\mathbb{Z}$ være mengden av alle hele tall.
La f være definert som funksjonen $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der $f(x) = x^3$

i) Bestem verdimengden V_f til f.

ii) Avgjør om f er

- *en-til-en*
- *på*

Svarene må begrunnes.

b) Vi utvider nå definisjonsmengden og verdiområdet til å være de reelle tallene $\mathbb{R}$ slik at f nå er definert som funksjonen $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, der $f(x) = x^3$

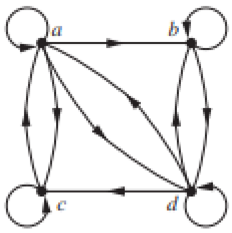
i) Hva blir verdimengden V_f til f nå?

ii) Avgjør om f nå er

- *en-til-en*
- *på*

iii) f har en invers funksjon f^{-1} som er slik at $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.
Hvordan kan vi vite at f har en invers funksjon?
Bestem den inverse funksjonen f^{-}.

c) Nedenfor ser du grafen G_R til en relasjon R på A, der $A = \{a, b, c, d\}$



i) Skriv opp relasjonen R som en mengde verdipar.

ii) Bestem matrisen M_R til R.

iii) Avgjør om R er

- *refleksiv*
- *symmetrisk*
- *antisymmetrisk*
- *transitiv*

iv) Avgjør om R er en *ekvivalensrelasjon*, en *partiell ordning* eller ingen av delene.

Svaret må begrunnes.

Oppgave 3

Der hvor tallene blir store kan svarene angis som et produkt av faktorer.

a) 10 barn fra et idrettslag skal fraktes til en turnering i en minibuss med 10 passasjerseter. På hvor mange ulike måter kan barna plasseres i minibussen?

b) På avreisedagen er det 4 barn som melder avbud. På hvor mange måter kan de 6 resterende barna plasseres i bussen?

c) 4 trenerne skal kjøre en egen personbil med 5 seter. Det er kun to som har førerkort og disse to skal bytte på kjøringen. På hvor mange måter kan trenerne plasseres i bilen?

d) Idrettslaget har totalt 30 utøvere og 6 trenere. Det skal velges et styre bestående av 2 trenere og 2 utøvere. På hvor mange måter kan styre velges forutsatt at alle utøvere og trenere stiller til valg?

e) På hvor mange måter kan bokstavene i ordet KARAOKEBAR stokkes om?

Oppgave 4

a) I varehandelen identifiseres de ulike produktene ved hjelp av en *universal produktkode* kalt UPC (Universal Product Code). Den vanligste typen UPC har 12 siffer. Det første sifferet betegner en produktkategori, de fem neste identifiserer produsenten, mens de følgende fem identifiserer det konkrete produktet. Det siste sifferet, X_{12}, er et kontrollsiffer. Dette er bestemt på følgende måte:

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 + 3X_5 + X_6 + 3X_7 + X_8 + 3X_9 + X_{10} + 3X_{11} + X_{12} \equiv 0 \pmod{10}$$

i) Hva må kontrollsifferet X_{12} være for $79357343104X_{12}$ skal være en lovlig UPC?

ii) Avgjør om 041331021641 er en lovlig UPC.

Vis hvordan du har kommet frem til svarene.

b) Konverter følgende binære tall 1111010111010111_2 til

i) oktalt

ii) hexadesimalt

iii) desimalt (Du kan gjerne skrive svaret som et potensuttrykk.)

Oppgave 5

Gitt differensligningen $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, der $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$.

a) Bestem a_2, a_3 og a_4.

b) Bestem differensligningens karakteristiske polynom, og finn røttene r_1 og r_2.

c) Den generelle løsningen er gitt ved $a_n = \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n$.
Finn α og β og bruk dem til å bestemme formelen for a_n.

d) Regn ut a_3 og a_4 ved hjelp av formelen for a_n.
Sjekk om du får samme svar som du fikk under punkt a).

Oppgave 6

a) Nedenfor ser du de første tre radene i Pascals trekant:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

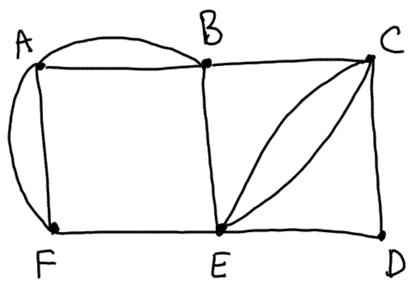
i) Føy til de neste tre radene i trekanten.

ii) Skriv opp trekanten på nytt (inklusiv de radene du har føyd til), men nå med tall istedenfor binomialkoeffisienter.

iii) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Skriv ut $(x + y)^5$ på tilsvarende form.

iv) Hvilken koeffisient skal stå foran x^4y^8 i polynomet $(x + y)^{12}$ når det er skrevet ut på tilsvarende form som polynomene i punkt *iii)*?

b) Nedenfor ser du bilde av urettet graf.



Avgjør om det finnes en *lukket* eller *åpen Euler-vei* gjennom grafen, der alle kantene passeres én, og kun én gang. Skriv opp veien hvis den finnes.

Svarene må begrunnes!

SLUTT

Vedlegg

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er *en-til-en* hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er *på* hvis $\forall (b \in B)\ \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^{T} og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^{T}, andre rad i A blir andre kolonne i A^{T}, osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ – matrise, så blir A^{T} en $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$ – matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at

a div $d = q$ og a mod $d = r$.

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis $\gcd(a,b)$ er største felles divisor for a og b og $lcm(a,b)$ er minste felles multiplum for a og b, så er $ab = \gcd(a,b)\cdot lcm(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a-b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

1) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ hvis og bare hvis $\mathrm{a} \bmod \mathrm{m} = \mathrm{b} \bmod \mathrm{m}$

2) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{c} \equiv \mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$, så er $\mathrm{a}+\mathrm{c} \equiv \mathrm{b}+\mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bd} \pmod{\mathrm{m}}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}, \ r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La *a* være første ledd, *b* siste ledd og *d* differensen mellom to og to ledd. Antall ledd *n* er gitt ved $n = \frac{b-a}{d}+1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \qquad \binom{n}{0}=1, \qquad \binom{n}{1}=n, \qquad \binom{n}{n}=1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1,\ A_2,\ A_3,\ .\ .\ .\ ,\ A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup\ .\ .\ .\ \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = Ø$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ $(b \neq a)$ slik at $(a,b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ $(b \neq a)$ slik at $(b,a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.