# Løsningsforlag til eksamen i Diskret matematikk

# 29. november 2017

Oppgave 1, 2, 3, 4, 5 og 6 teller likt. For å få full score må man vise hvordan man har kommet frem til svarene (ved f. eks. figurer eller mellomregninger), eventuelt gi begrunnelser for svarene man har kommet frem til. Det siste er spesielt viktig på ja/nei-spørsmål av typen man finner i oppgave 2b, 5c , 5d og 6b.

## Oppgave 1

**a)**

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $r \to (p \vee q)$ | $\neg\,(r \to (p \vee q))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | S | U |
| S | S | U | S | S | U |
| S | U | S | S | S | U |
| S | U | U | S | S | U |
| U | S | S | S | S | U |
| U | S | U | S | S | U |
| U | U | S | U | U | S |
| U | U | U | U | S | U |

For at et utsagn skal være en **tautologi** må det være sant i alle tolkninger, dvs. kolonnen under utsagnet må kun inneholde S'er.
For at et utsagn skal være en **selvmotsigelse** må det være usant i alle tolkninger, dvs. kolonnen under utsagnet må kun inneholde U'er.
Ingen av delene er tilfelle her. Følgelig er $\neg\,(r \to (p \vee q))$ verken er en tautologi eller en selvmotsigelse.

Utsagnet $\neg\,(r \to (p \vee q))$ er sant i kun ett tilfelle, nemlig når p og q er usanne og r er sant. I alle andre tilfeller er det usant.

**b)**

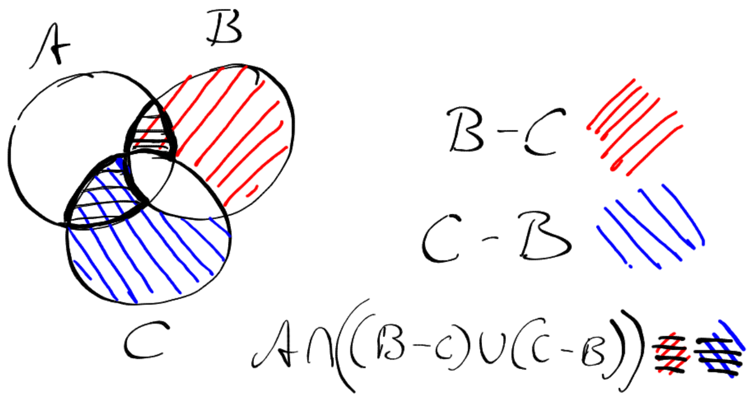
i) $(\,P(Ola, Per) \wedge P(Per, Unni)\,) \to \neg P(Ola, Unni)$

ii) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$

iii) $\neg\forall y\,\exists x\,P(x,y) \equiv \exists y\,\neg\exists x\,P(x,y) \equiv \exists y\,\forall x\,\neg P(x,y)$

"Det finns noen om ikke har noen far" er det samme som «Det er ikke alle som har en far»
Rekkefølgen på kvantorene er avgjørende for at utsagnet blir riktig. De tre ekvivalente utsagnene over gir alle riktig svar.

c) Venndiagram:




d) Her var svaret den sammen mengdeformelen i oppgave c).

$$A \cap ((B - C) \cup (C - B))$$

Det finns imidlertid mange ekvivalente løsninger.

## Oppgave 2

### a)

i)

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & C \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$1 + a = 3$ gir $a = 2$
$-1 + b = 0$ gir $b = 1$
$2 + c = -1$ gir $c = -3$
$2 + d = 1$ gir $d = -1$
$1 + e = 2$ gir $e = 1$
$0 + f = 1$ gir $f = 1$

*Vi får*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*ii)*

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

*iii)*

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 6$

$b = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$c = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 1$

$d = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5$

*Vi får*

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

*Her er det også greit å bruke skjema for matrisemultiplikasjon for å vise hvordan man har kommet frem til svaret.*

*b)*

*f er ikke **en-til-en** fordi ulike verdier i definisjonsmengden gir samme funksjonsverdi, f.eks. f(1) = f(-1) = 1, f(2) = f(-2) = 4, osv.*

*$V_f$ = {0, 1, 4, 9, 16, 25, ….}. Siden $V_f \neq \mathbb{Z}$, dvs. verdimengden er forskjellig fra verdiområdet er f ikke **på**.*

## Oppgave 3

a)

5 2 7 4

$101010111100_2 = \underline{\underline{5274_8}}$

A B C

$101010111100_2 = \underline{\underline{ABC_{16}}}$

$101010111100_2 = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0$

$= 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12 = \underline{\underline{2748_{10}}}$

Svaret kan også gis som en sum av toerpotenser:

$2^{11}+2^9+2^7+2^5+2^4+2^3+2^2 = \underline{\underline{2748_{10}}}$

eller åtterpotenser:

$5 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 5 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 4 = \underline{\underline{2748_{10}}}$

b)

| | | |
|---|---|---|
| | | $11111111_2$ |
| Tar komplimentet: | | 00000000 |
| Legger til 1 | + | 1 |
| | = | 00000001 |

Setter minus foran og får svaret -1

Dvs. $\underline{\underline{11111111_2 = -1}}$ i fast 8-bits format.

c) Her kan du enten betrakte den ledige plassen som en "blank" brikke eller bare som en ledig plass.

Hvis du velger å betrakte den ledige plassen som nettopp en ledig plass, får du 8 forskjellige brikker som skal plasseres på 9 plasser. Dette tilsvarer et ordnet r-utvalg (r-permutasjon)og svaret blir

$$\frac{9!}{(9-8)!} = \frac{9!}{1!} = 9! = \underline{\underline{362880}}$$

Hvis du betrakter den ledige plassen som en brikke, får du 9 forskjellige brikker som skal plasseres på 9 plasser. Dette tilsvarer en permutasjon av 9 forskjellige objekter og svaret blir derfor

$$9! = \underline{\underline{362880}}$$

Som du ser blir svaret det samme.

**d)**

I denne oppgaven er det snakk om en permutasjon der like verdier inngår. I eksemplene som vi har gjennomgått har «verdiene» vært bokstaver i ord, der vi skulle bestemme på hvor mange måter bokstavene kunne stokkes om.
Dette er en tilsvarende oppgave, men her er bokstavene erstattet med rundinger, trekant er og blank:

$$\frac{(antall\ plasser)!}{(antall\ rundinger)!\cdot(antall\ trekanter)!\cdot(antall\ blanke)!}$$

$$\frac{7!}{3!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = 7\cdot 5\cdot 4 = \underline{\underline{140}}$$

## Oppgave 4

**a)**

Karakteristisk polynom: $r^2 = 3r - 2$

Løser annengradsligningen for å finne røttene $r_1$ og $r_2$:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$r_1 = 2 \quad og \quad r_2 = 1$$

b)

Ved å sette n=0 og n=1 inn i den generelle løsningen

$$a_n = \alpha\, {r_1}^n + \beta {r_2}^n$$

får vi ligningssettet:

1. $+\beta = 0$
2. $2\alpha + \beta = 1$

Trekker ligning nr.1 fra ligning nr. 2 og får $= 1$

Setter $\alpha = 1$ inn i ligning nr. 1 og får $\beta = -1$.

Setter $\alpha,\ , r_1$ og $r_2$ inn i den generelle løsningen

$$a_n = \alpha\, {r_1}^n + \beta {r_2}^n$$

og får formelen for $a_n$:

$$a_n = 2^n - 1$$

c)

Bruker formelen til å finne $a_2$:

$a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Bruker rekursjonsligningen til å finne $a_2$ og ser at vi får samme svar:

$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3 - 0 = 3$

Bruker formelen til å finne $a_3$:

$a_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

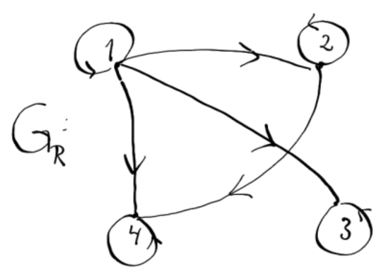
Bruker rekursjonsligningen til å finne $a_2$ og ser at vi får samme svar:

$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7$

## Oppgave 5

a)

R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)} b)




$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

i) Relasjonen **R er refleksiv** fordi for alle $a \in A$ har vi $(a,a) \in R$. Dette betyr at alle tall går opp i seg selv. Vi kan se det på grafen ved at alle punktene har sløyfer, og vi kan se det på matrisen ved at hoveddiagonalen inneholder kun 1'ere.

ii) Relasjonen R er <u>ikke</u> symmetrisk fordi hvis $(a,b) \in R$ og $a \neq b$ har vi at $(b, a) \notin R$. Vi ser det på grafen ved at det <u>ikke</u> går piler i begge retninger mellom de relaterte punktene. Vi ser det også på matrisen ved at den ikke er symmetrisk om hoveddiagonalen.

iii) Relasjonen **R er antisymmetrisk** fordi for alle a og b i A gjelder hvis $(a,b) \in R$ og $a \neq b$ så $(b, a) \notin R$. Dvs. Hvis a er faktor i b og a og b er forskjellige tall kan ikke b være faktor i a. (F.eks. hvis 2 er faktor i 4 så kan ikke 4 være faktor i 2.) Vi ser det på grafen ved at det kun går piler i en retning mellom de relaterte punktene.

Vi ser det på matrisen ved at for alle 1'ere utenfor hoveddiagonalen står det 0 på den tilsvarende plassen speilet om hoveddiagonalen.

iv) Relasjonen **R er transitiv** fordi
hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$ så $(a,c) \in R$
Bevis:
Hvis a går opp i b kan b skrives som
$b = a\,x$
Hvis b går opp i c kan c skrives som
$c = b\,y = a\,x\,y$.
Vi ser at a er faktor i c og følgelig går a opp i c.

**d)**

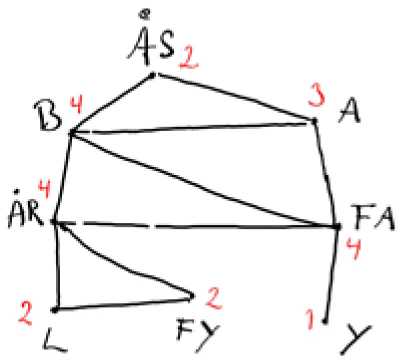
i) For at relasjonen R skal være en ekvivalensrelasjon må den være refleksiv, symmetrisk og transitiv. R er refleksiv og transitiv, men ikke symmetrisk. Følgelig er R <u>ikke</u> en ekvivalensrelasjon.

ii) Siden relasjonen R er **refleksiv, antisymmetrisk** og **transitiv,** er **R en partiell ordning**.

**Oppgave 6**

**a)** I grafen er det brukt følgende forkortelser for bydelsnavnene:

Åsane: ÅS, Arna: A, Bergenhus: B, Årstad: ÅR, Laksevåg: L, Fyllingsdalen: FY, Fana: FA og Ytrebygda: Y




**b)** Ja det er mulig å besøke alle bydelene og krysse hver grense mellom dem kun én gang.
I følge Euler finnes det en åpen Euler-vei gjennom grafen der alle kantene passeres én og kun én gang, hvis nøyaktig 2 noder

*(bydeler) er av odde grad. Dette er tilfellet her. (Y har grad 1 og A har grad 3). Hvis man starter turen i en av de to nodene (bydelene) av oddegrad, og slutter turen i den andre noden av odde grad, kan man finne en åpen Euler-vei gjennom grafen, f.eks:*
*Y, FA, AR, FY, L, AR, B, FA, A, B, ÅS, A.*

*For at det skal finnes en lukket Euler-vei (der man starter og slutter turen på samme node(bydel) må alle nodene (bydelene) være av par grad. Det er ikke tilfellet her. Følgelig finnes det ikke noen lukket Euler-vei gjennom grafen.*