

Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 29. november 2017

Tid:

Antall sider (inkl. forside): 9

Antall oppgaver: 6

Tillatte hjelpemidler: Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.

Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder:

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Studieleders underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Studieleder	

Emnekode: DAPE 1300 / ITPE 1300

Oppgave 1

- a) Avgjør om følgende utsagn er en tautologi (dvs. alltid sant), en selvmotsigelse (dvs. alltid usant) eller ingen av delene:

$$\neg(r \rightarrow (p \vee q))$$

Vis hvordan du kom frem til svaret.

- b) Gitt utsagnsfunksjonen

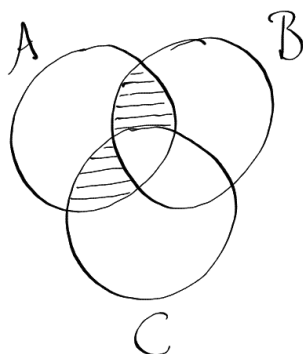
$$P(x, y) = x \text{ er far til } y$$

Oversett følgende setninger til logiske uttrykk ved hjelp $P(x, y)$, kvantorer og logiske operatorer:

- i) «Ola er far til Per og Per er far til Unni, bare hvis Ola ikke er far til Unni.»
- ii) «Alle har en far.»
- iii) «Det finnes noen som ikke har noen far.»

- c) La A , B og C være vilkårlige mengder. Tegn et Venn-diagram der du skraverer mengden $A \cap ((B - C) \cup (C - B))$

- d) Finn en formel for mengden representert ved det skraverte området i følgende Venn-diagram:

**Oppgave 2**

- a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- i) Bestem matrisen B slik at $A + B = C$.
- ii) Bestem den transponerte matrisen A^T .
- iii) Bestem matriseproduktet $A \cdot A^T$.

- b) La $\mathbb{Z}$ være mengden av alle hele tall, dvs. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
La f være definert som funksjonen $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ der $f(x) = x^2$.

Avgjør om f er

- i) *en-til-en*
- ii) *på*

Svarene må begrunnes.

Oppgave 3

- a) Gitt tallet 101010111100_2 på binær form.

Konverter tallet til

- i) Oktal form
- ii) Heksadesimal form
- iii) Desimal form

- b) Anta at vi bruker fast 8 bits format og 2-kompliment. Hvilket desimal tall representerer det binære tallet 11111111 ?

c)

7	4	3
2	5	6
1	8	

8-pussel er et spill som mange av oss kjenner igjen fra barndommen. På et 3×3 brett er det plassert 8 brikker. En plass er «ledig» slik at brikkene kan skyves rundt på brettet. Målet er å få brikkene i en bestemt rekkefølge, for eksempel slik at tallene står i stigende rekkefølge slik:

1	2	3
8		4
7	6	5

På hvor mange forskjellige måter kan brikkene plasseres?

- d) Vi skal se på et spill for en person. Spillet har syv plasser og seks brikker, hvorav tre runde og tre trekantete. Når spillet starter står brikkene i denne posisjonen:

Δ	Δ	Δ		O	O	O
---	---	---	--	---	---	---

Hvor mange ulike måter kan brikkene plasseres på?

Oppgave 4

Gitt differensligningen $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, der $a_0 = 0$ og $a_1 = 1$.

- a) Bestem ligningens karakteristiske polynom, og finn røttene r_1 og r_2 .
- b) Den generelle løsningen er gitt ved $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
Hvilket ligningssett må løses for å finne α og β ?
Finn α og β og bruk dem til å bestemme formelen for a_n .
- c) Regn ut a_2 og a_3 ved hjelp av
 - i) formelen for a_n
 - ii) differensligningen

Sjekk at du får samme svar.

Oppgave 5

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og la R være relasjonen på A gitt ved $R = \{(a, b) \mid a \text{ går opp i } b\}$.

(At « a går opp i b » betyr også at a er faktor i b .)

- a) Skriv opp R som en mengde av konkrete tallpar.
- b) Tegn grafen til G_R til relasjonen R .
- c) Sett opp matrisen M_R til relasjonen R .
- d) Avgjør om R er
 - i) refleksiv
 - ii) symmetrisk
 - iii) antisymmetrisk
 - iv) transitiv
- e) Er relasjonen R
 - i) en ekvivalensrelasjon?
 - ii) en partiell ordning (delvis ordning)?

Alle svarene under punkt d) og e) må begrunnes!

Ny oppgave følger på neste side.

Oppgave 6

Nedenfor ser du et kart over bydelene i Bergen kommune.



a) Tegn opp en graf som viser hvilke bydeler som grenser til hverandre. La hvert punkt representere en bydel og la kantene representere naborelasjoner dvs. grensene mellom bydelene. (NB! Fyllingsdalen grenser ikke til Fana og Laksevåg grenser ikke til Bergenhus.) Bruk gjerne bokstavforkortelser for bydelnavnene.

b) Er det mulig å finne en reiserute gjennom bydelene der alle grensene mellom bydelene krysses én og bare én gang? Med andre ord; finnes det en åpen eller lukket *Euler-vei* gjennom grafen?

I begrunnelsen for svaret skal du gjøre rede for de betingelser som, ifølge *Leonhard Euler*, må være oppfylt for at det skal finnes en lukket eller åpen Euler-vei gjennom en graf.

Vedlegg

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon

$f : A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon

$f : A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B) \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^T , andre rad i A blir andre kolonne i A^T , osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $m \times n$ -matrise, så blir A^T en $n \times m$ -matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at

$$a \text{ div } d = q \text{ og } a \text{ mod } d = r.$$

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis gcd(a,b) er største felles divisor for a og b og lcm(a,b) er minste felles multiplum for a og b, så er $ab = \text{gcd}(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente modulo m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

- 1) $a \equiv b \pmod{m}$ hvis og bare hvis $a \bmod m = b \bmod m$
- 2) $a \equiv b \pmod{m}$ og $c \equiv d \pmod{m}$, så er $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ og $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(a,b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(b,a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.