

Løsningsforslag til eksamen høst 2016

Hver oppgave tildeles maksimalt 10 poeng. Høyeste poengsum er 100

Karakterer:

$$90 \leq A$$

$$75 \leq B < 90$$

$$60 \leq C < 75$$

$$50 \leq D < 60$$

$$40 \leq E < 50$$

$$F < 40$$

Oppgave 1

a) 3 poeng

i) $p \wedge q \wedge \neg r$

ii) $q \rightarrow p$

iii) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \rightarrow \neg r \equiv r \rightarrow (p \vee q)$

Ingen av de tre utsagnene er ekvivalente, men det siste er her skrevet på tre ekvivalente måter.

b) 4 poeng

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$	$p \oplus q$
S	S	U	U	U	U	U	U
S	U	U	S	S	U	S	S
U	S	S	U	U	S	S	S
U	U	S	S	U	U	U	U

Vi ser at de to kolonnene lengst til høyre er like. Dermed er det bevist at uttrykkene er ekvivalente.

c) 3 poeng

i) $\forall x P(x, \text{kari})$

ii) $\neg \exists x P(x, \text{Per}) \equiv \forall x \neg P(x, \text{Per})$

iii) $\neg \forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists x \neg \exists y P(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)$

Oppgave 2

a) 3 poeng

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

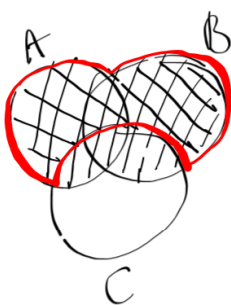
ii) $A \cap B = \{3, 4\}$

iii) $A - B = \{1, 2\}$

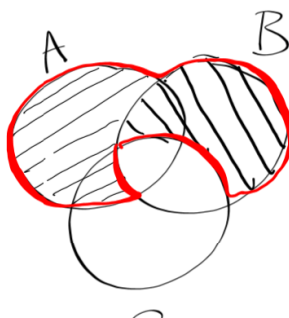
iv) $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 5, 6\}$

v) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$

b) 2 poeng



$(A \cup B) - C$



$(A - B) \cup (B - C) \equiv$

Vi ser av figurene at mengdene ikke er like.

c) 1 poeng

Det finnes flere løsninger. En løsning er:

$$(B - C) \cup (C - B)$$

d) 4 poeng

La mengden A være de som leser Aftenposten, mengden B være de som leser VG, og mengden C være de som leser Dagbladet.

$$|A| = 150, \quad |B| = 100, \quad |C| = 70$$

$$|A \cap B| = 80 \text{ (tilsvarer de som leser både Aftenposten og VG)}$$

$$|A \cap C| = 45 \text{ (tilsvarer de som leser både Aftenposten og Dagbladet)}$$

$$|B \cap C| = 10 \text{ (tilsvarer de som leser både VG og Dagbladet)}$$

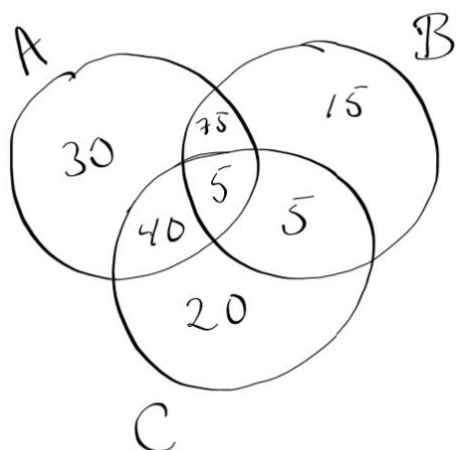
$$|A \cap B \cap C| = 5 \text{ (tilsvarer de som leser alle de tre avisene)}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad |A \cup B \cup C| &= \\ |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 150 + 100 + 70 - 80 - 45 - 10 + 5 = \underline{190} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 150 - 80 - 45 + 5 = \underline{30}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad &|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &+ |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &+ |C| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= (150 - 80 - 45 + 5) \\ &+ (100 - 80 - 10 + 5) \\ &+ (70 - 10 - 45 + 5) \\ &= \underline{65} \end{aligned}$$

Vi kan også lese svarene ut fra figuren:



Oppgave 3

a) 3 poeng

$$f(8) = 8 \bmod 9 = 8$$

$$g(8) = 8 \operatorname{div} 9 = 0$$

$$f(9) = 9 \bmod 9 = 0$$

$$g(9) = 9 \operatorname{div} 9 = 1$$

$$f(18) = 18 \bmod 9 = 0$$

$$g(18) = 18 \operatorname{div} 9 = 2$$

b) 3 poeng

$$V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$V_g = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

c) 4 poeng

i) $f(x)$ er ikke på fordi $V_f \neq A$

$g(x)$ er på fordi $V_g = A$

ii) $f(x)$ er ikke en-til-en fordi to ulike x -verdier kan gi samme funksjonsverdi, f.eks. $f(9) = f(18) = 0$

$g(x)$ er av samme årsak heller ikke en-til-en,
f.eks. $g(7) = g(8) = 0$

Oppgave 4

a) 3 poeng

	A		
	0	1	0
	0	0	1
	1	0	0
A	0	1	0
	0	0	1
	1	0	0

$$\begin{aligned}
 a &= (010) \vee (110) \vee (011) = 0 \\
 b &= (011) \vee (110) \vee (010) = 0 \\
 c &= (010) \vee (111) \vee \dots = 1 \\
 d &= (010) \vee (010) \vee (111) = 1 \\
 e &= (011) \vee (010) \vee (110) = 0 \\
 f &= (010) \vee (011) \vee (110) = 0 \\
 g &= (110) \vee (010) \vee (011) = 0 \\
 h &= (111) \vee \dots = 1 \\
 i &= (110) \vee (011) \vee (010) = 0
 \end{aligned}$$

$$B = A \odot A = A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) 2 poeng

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) 2 poeng

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) 3 poeng

Finner først $A^{[3]}$:

$$A^{[3]} = A^{[2]} \odot A = B \odot A:$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & & A \\
 & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array} \\
 B
 \end{array}
 \quad
 A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finner så $A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} = A \vee B \vee A^{[3]}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

a) 2 poeng

NB! Fremgangsmåtene må vises!

$$\begin{array}{cccccc}
 1100 & 1100 & 1001 & 1001 & 1010 & 1010_2 \\
 \underline{12} & \underline{12} & \underline{9} & \underline{9} & \underline{10} & \underline{10} \\
 C & C & 9 & 9 & A & A
 \end{array}$$

i)

$$a = 110011001001100110101010_2 = \underline{\underline{CC99AA_{16}}}$$

ii) $a = 12 \cdot 16^5 + 12 \cdot 16^4 + 9 \cdot 16^3 + 9 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 10$

Svaret kan også skrives som

$$a = 2^{23} + 2^{22} + 2^{19} + 2^{18} + 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1$$

b) 2 poeng

i)

7	1	7	3	5	8	1	7	9	8	9	4	4	2	2	1	1	5	2	1	0
2			1			0		1		1		0		0		1	1	1	0	1

$$b = 717_{10} = \underline{\underline{1011001101_2}}$$

ii)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ | & & | & & | & & | & & | & \\ 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & & \end{array}$$

$$b = 717_{10} = 1011001101_2 = \underline{\underline{1315_8}}$$

c) 3 poeng

Rekken er aritmetisk der differansen d er lik 5.

$$\text{Antall elementer } n = (171 - 6) / 5 + 1 = 34$$

$$\text{Summen} = (171 + 6) \cdot 34 / 2 = \underline{\underline{3009}}$$

d) 3 poeng

Rekke er geometrisk der forholdet mellom et ledd og det foregående er lik 3.

Summen kan skrives som

$$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6$$

$$\sum_{k=0}^6 2 \cdot 3^k = \frac{2(3^{6+1} - 1)}{3 - 1} = 2(3^7 - 1) = \underline{\underline{2186}}$$

Oppgave 6

a) 2 poeng

7 forskjellige bokstaver kan permuteres på $7! = 5040$ forskjellige måter.

b) 3 poeng

Når permuteringen av bokstavene skal inneholde bokstavrekken AFG kan vi se på disse tre bokstavene som et element. Da får vi 5 forskjellige elementer (bokstavene B, C, D, og E, samt bokstavrekken AFG) som kan permuteres på $5! = 120$ forskjellige måter.

c) 2 poeng

Vi tenker oss at vi har 22 plasser til rådighet, der bøkene bruker 20 av dem, mens skilleveggene mellom eskene bruker to. Problemet reduseres da til å finne alle mulige plasseringer av de to skilleveggene på 22 plasser:

$$\binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{2} = 11 \cdot 21 = \underline{\underline{231}}$$

d) 3 poeng

Vi kan tenke oss at vi først legger en bok i hver ekse. Deretter finner vi alle mulige plasseringer for resten av bøkene ved isteden å finne alle mulige plasseringer av de to skilleveggene på de 19 resterende plassene:

$$\binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2} = 19 \cdot 9 = \underline{\underline{171}}$$

Oppgave 7

a) 5 poeng

Basistrinnet: Viser at uttrykket gjelder for $n = 1$:

$$n = 1: \quad 1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \text{OK.}$$

Induksjonstrinnet: Antar at uttrykket gjelder for n , dvs. at

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \text{er sant.}$$

Tar vi med det nest siste leddet ser rekken slik ut:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Bruker antagelsen til å vise at uttrykket også gjelder for $n + 1$.

For å vise det setter vi inn $n+1$ for n i antagelsen:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2^{(n+1)-2} + 2^{(n+1)-1} = 2^{n+1} - 1$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \text{OK.}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2^n - 1, \text{ antagelsen}}$

Vi har nå vist at uttrykket gjelder for $n = 1$, og at hvis det gjelder for n så gjelder det også for $n+1$. Følgelig har vi ved induksjon vist at uttrykket gjelder for alle $n \geq 1$.

b) 2 poeng

$$252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$\text{lcm}(252, 198) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{\underline{2772}}$$

c) 2 poeng

a	b	a mod b
252	198	54
198	54	36
54	36	18
36	18	0

$\gcd(252, 198) = 18$

$$\gcd(252, 198) = 18$$

d) 1 poeng

$$\text{lcm}(a, b) \cdot \gcd(a, b) = a \cdot b$$

$$VS = \text{lcm}(252, 198) \cdot \gcd(252, 198) = 2772 \cdot 18 = 49896$$

$$HS = 252 \cdot 198 = 49896$$

Vi ser av svarene i b) og c) stemmer.

Oppgave 8

a) 2 poeng

$$a_2 = a_1 + 6a_0 = 6 + 6 \cdot 3 = \underline{24}$$

$$a_3 = a_2 + 6a_1 = 24 + 6 \cdot 6 = \underline{60}$$

b) 1 poeng

$$r^2 = r + 6$$

c) 7 poeng

Finner først røttene til likningen:

$$r^2 - r - 6 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$r_1 = 3 \quad r_2 = -2$$

Den generelle likningen for a_n er:

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

ved å velge $n = 0$ og $n = 2$, samt sette inn verdiene for r_1 , r_2 , a_0 og a_2 får vi likningssettet:

$$\text{I: } \alpha + \beta = 3$$

$$\text{II: } 3\alpha - 2\beta = 6$$

$$\text{I: } 2\alpha + 2\beta = 6$$

$$\text{I} + \text{II: } 5\alpha = 12$$

$$\alpha = \frac{12}{5}$$

$$\frac{12}{5} + \beta = 3$$

$$\beta = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \frac{12}{5}, \quad \beta = \frac{3}{5}$$

ved å sette verdiene vi nå har funnet i den generelle likningen får vi:

$$a_n = \frac{12}{5} \cdot 3^n + \frac{3}{5} \cdot (-2)^n$$

$$a_n = \frac{3}{5} \left(4 \cdot 3^n + (-2)^n \right)$$

$$a_2 = (3/5) \cdot (4 \cdot 9 + 4) = (3/5) \cdot 40 = 120/5 = 24$$

$$a_3 = (3/5) \cdot (4 \cdot 27 - 8) = (3/5) \cdot 100 = 60$$

Begge svarene stemmer med de vi fikk under punkt a).

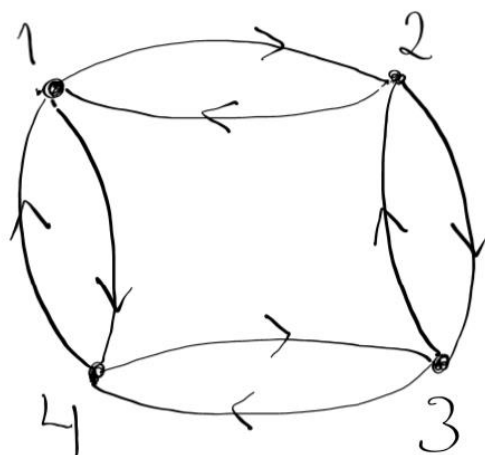
Oppgave 9

a) 2 poeng

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

b) 1 poeng

Grafen til R:



c) 1 poeng

Matrisen til R:

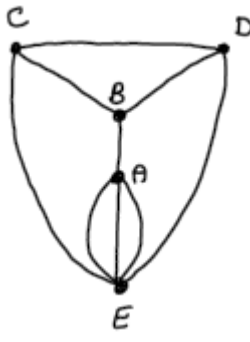
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d) 6 poeng

- i) R er ikke refleksiv. F.eks. $(1,1) \notin R$.
Skulle den vært refleksiv, så måtte alle par på formen (a, a) vært med i R . Da ville alle nodene i graden hatt sløyfer og på diagonalen i matrisen ville det kun stått enere.
- ii) R er symmetrisk fordi
for alle $(a, b) \in R$ gjelder at $(b, a) \in R$.
Vi kan se symmetrien i grafen ved at alle pilene mellom nodene går begge veier. Vi kan også se det på matrisen fordi den er symmetrisk om hoveddiagonalen.
Vi kunne også argumentert med at operatoren $+$ er en kommutativ operator, dvs. $a+b = b+a$. Hvis $a+b$ er et oddetall må $b+a$ også være et oddetall.
- iii) Hvis R skal være transitiv må følgende gjelde:
Hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$ så må også $(a, c) \in R$.
F. eks: Hvis $1 + 2$ er et oddetall og $2 + 3$ er et oddetall, må $1 + 3$ også være et oddetall. Dette stemmer ikke fordi $1 + 3 = 4$ er et partall. Følgelig er R ikke transitiv.

Oppgave 10.

a) 4 poeng



$$\text{grad}(A)=4, \text{grad}(B)=3, \text{grad}(C)=3, \text{grad}(D)=3, \text{grad}(E)=5.$$

b) 3 poeng

Det å starte i et av rommene eller utendørs og så gå gjennom hver dør nøyaktig én gang, svarer til en Eulervei gjennom grafen i punkt a). Men den grafen har verken en åpen eller en lukket Eulervei siden den har fire punkter med oddetalls grad. For at en slik vei skal finnes må enten alle punktene ha partalls grad (lukket Eulervei) eller så må kun 2 punkter ha oddetallsgrad (åpen Eulervei).

c) 3 poeng

Det å sette inn en ytterdør betyr en ekstra kant mellom enten rom A, B, C eller D og rom E. En ytterdør i rom B vil fungere. Da vil $\text{grad}(B)$ bli 4 og $\text{grad}(E)$ bli 6. Dermed får vi kun 2 punkter med oddetallsgrad. Følgelig finnes det en åpen Eulervei gjennom grafen. En ytterdør i rom C eller D vil også fungere.