

Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 30.11.2016

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 12

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler:

Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.

Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.

Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Eva Hadler Vihovde

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Eva Hadler Vihovde				

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Det kan for eksempel skje ved at du tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

- a) Utsagnene under omhandler arbeidskrav, eksamen og karakter i faget Diskret matematikk. La utsagnene p , q og r være gitt ved:

p : *Jeg har bestått arbeidskravene.*

q : *Jeg kan ta eksamen.*

r : *Jeg kan få A.*

Skriv følgende utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer:

- i) *Jeg har bestått arbeidskravene og kan ta eksamen, men jeg kan ikke få A.*
- ii) *Jeg kan ta eksamen bare hvis jeg har bestått arbeidskravene.*
- iii) *Hvis jeg verken har bestått arbeidskravene eller kan ta eksamen, så kan jeg ikke få A.*

Er noen av utsagnene ekvivalente?

- b) La p og q være utsagn. Avgjør om utsagnene $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ og $p \oplus q$ er ekvivalente.

- c) La utsagnsfunksjonen $P(x, y)$ være definert ved setningen « x er glad i y », der x og y er personer.

Skriv følgende utsagn ved hjelp av logiske operatorer, kvantorer og utsagnsfunksjonen P :

i) «Alle er glad i Kari.»

ii) «Ingen er glad i Per.»

iii) «Ikke alle er glad i noen.»

Oppgave 2

- a) La mengdene A og B være gitt ved $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Finn mengdene

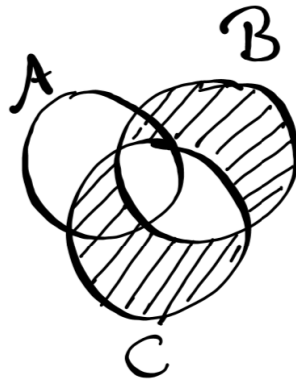
- i) $A \cup B$
- ii) $A \cap B$
- iii) $A - B$
- iv) $(A \cup B) - (A \cap B)$
- v) $(A - B) \cup (B - A)$

- b) La A , B og C være vilkårlige mengder.

Er mengdene $(A \cup B) - C$ og $(A - B) \cup (B - C)$ like?

Avgjør det ved å tegne et Venn-diagram for hver av dem der du skravérer de aktuelle områdene.

- c) Finn en mengdeformel med A , B og C for det skraverte området i Venn-diagrammet:



- d) På en arbeidsplass ble det foretatt en undersøkelse av hvilke aviser de ansatte leste daglig. Undersøkelsen viste at 150 personer leste Aftenposten, 100 personer leste VG mens 70 leste Dagbladet. Videre leste 80 personer både Aftenposten og VG, 45 personer leste både Aftenposten og Dagbladet, 10 personer leste VG og Dagbladet mens kun 5 personer leste alle tre avisene daglig.

- i) Hvor mange personer leste minst en av de tre avisene?
- ii) Hvor mange leste kun Aftenposten?
- iii) Hvor mange leste kun én avis?

Vis hvordan du har kommet frem til svarene.

Oppgave 3

La A være mengden av de ikke-negative heltallene, dvs. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

La $f: A \rightarrow A$ og $g: A \rightarrow A$ være funksjonene definert ved

$$f(x) = x \bmod 9$$

$$g(x) = x \operatorname{div} 9$$

a) Finn $f(x)$ og $g(x)$ for $x = 8$, $x = 9$ og $x = 18$.

b) Finn verdimengdene til f og g .

c) Avgjør om f og g er

i) på?

ii) en-til-en?

Oppgave 4

Gitt den logiske matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La $B = A^{[2]} = A \odot A$ være det logiske matriseproduktet av A med seg selv.

a) Vis at

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn $A \vee B$.

c) Finn $A \wedge B$.

d) Finn $A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]}$.

Oppgave 5

I oppgave **a)** og **b)** skal du vise hvordan du har kommet frem til svarene UTEN bruk av kalkulator.

a) Heltallet $a = 110011001001100110101010_2$ er gitt på binær form.

i) Finn a på heksadesimal form.

- ii) Finn a på desimal form. Svaret kan gjerne skrives som en sum av faktorer.

b) Heltallet $b = 717_{10}$ er gitt på desimal form.

- i) Finn b på binær form.
ii) Finn b på oktal form.

c) Finn summen av følgende rekke:

$$6 + 11 + 16 + 21 + \dots + 166 + 171$$

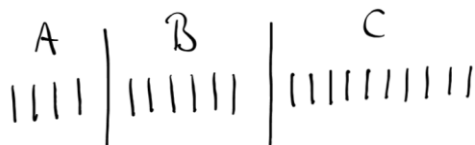
d) Finn summen av følgende rekke:

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 + \dots + 1458$$

Oppgave 6

- a)** Hvor mange permutasjoner av bokstavene ABCDEFG finnes det?
b) Hvor mange permutasjoner av bokstavene ABCDEFG inneholder bokstavrekken AFG? (Bokstavrekken BCAFGED er en slik permutasjon.)
c) På hvor mange måter kan man fordele 20 like bøker i tre esker, eske A, eske B og eske C?

Oppgaven kan løses på mange måter. Hvis du står fast kanskje følgende tips hjelpe deg på vei: Tenk deg at du plasserer bøkene etter hverandre på en linje, og av du plasserer to skillevegger innimellom bøkene. Bøkene som står til venstre for den venstre skilleveggen er eske i A, bøkene som står mellom de to skilleveggene er i eske B, mens bøkene som står til høyre for den høyre skilleveggen er i eske C.



På figuren over er det 4 bøker i eske A, 6 bøker i eske B og 10 bøker i eske C. Hvis skilleveggene står inntil hverandre uten bøker imellom er eske B tom. Hvis den venstre skilleveggen står lengst til venstre (uten bøker på sin venstre side) er eske A tom. Hvis den høyre skilleveggen står lengst til høyre (uten bøker på sin høyre side) er eske C tom.

- d)** På hvor mange måter kan bøkene fordeles i eskene hvis det skal være minst én bok i hver eske?

Oppgave 7

- a) La påstanden $P(n)$ være definert ved:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Bruk induksjon til å vise at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 1$.

- b) Finn minste felles multiplum av tallene 252 og 198 ved hjelp av primtallsfaktorisering.
- c) Bruk Euklids algoritme til å finne største felles divisor (faktor) til de samme tallene, dvs. tallene 252 og 198.
- d) Hvilken sammenheng er det mellom største felles divisor (faktor) av to tall og minste felles multiplum av de samme tallene? Bruk denne sammenhengen til å sjekke om svarene du fikk i punkt **b)** og **c)** er riktige.

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, der $n \geq 2$
og initialbetingelsene $a_0 = 3$ og $a_1 = 6$.

- a) Finn a_2 og a_3 .
- b) Bestem differensligningens karakteristiske polynom.
- c) Løs differensligningen slik at du finner en formel for a_n der ikke de to foregående leddene inngår. Vis at formelen din stemmer ved å sette inn $n = 2$ og $n = 3$. Da skal du få de samme resultatene som i punkt **a)**.

Oppgave 9

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og R være relasjonen på A gitt ved

$(a, b) \in R$ hvis og bare hvis $a + b$ er et oddetall.

Det betyr at for eksempel $(1, 2) \in R$ siden $1 + 2 = 3$ er et oddetall, mens $(1, 3) \notin R$ fordi $1 + 3 = 4$ er et partall.

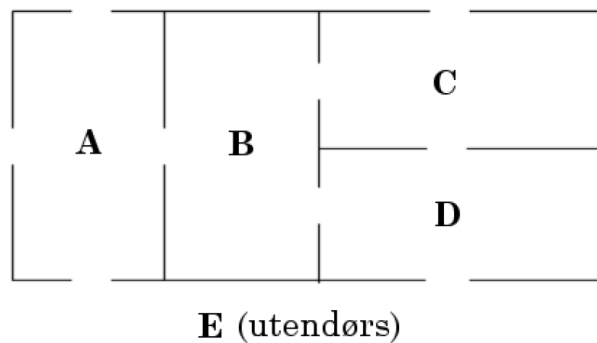
- a) Sett opp relasjonen R i form av en mengde av tallpar.
- b) Tegn grafen G_R til relasjonen R .
- c) Finn matrisen M_R til relasjonen R .

d) Avgjør om R er

- i) refleksiv?
- ii) symmetrisk?
- iii) transitiv?

Begrunn svarene.

Oppgave 10



Figuren over viser rommene i et hus. Det er fire rom med navn A, B, C og D. I hvert rom er det et antall dører (markert på figuren med åpninger). For eksempel er det fire dører i rom A. De dørene som går ut (til E) kalles ytterdører og de som går mellom to rom kalles innerdører.

- a) La hvert av rommene (A, B, C, D) og utendørs (E) være punkter i en graf med dørene som kanter mellom punktene.
Tegn grafen og bestem graden til hvert av de fem punktene i grafen.
- b) Er det mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver eneste dør nøyaktig én gang? Sagt på en annen måte: Finnes det en åpen eller lukket Euler-vei gjennom grafen? Begrunn svaret.
- c) Tenk deg at det skal settes inn en ny ytterdør i huset. Vil det da være mulig å starte i et av rommene eller eventuelt utendørs og så gå gjennom hver eneste dør nøyaktig én gang? Hvor måtte den nye ytterdøren i så fall settes inn?
Sagt på en annen måte: Finnes det nå en åpen eller lukket Euler-vei gjennom grafen etter at den nye ytterdøren er satt inn i huset?
Begrunn svaret.

Vedlegg

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \qquad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \qquad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f: A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er på hvis $\forall(b \in B) \exists(a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^T , andre rad i A blir andre kolonne i A^T , osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $m \times n$ -matrise, så blir A^T en $n \times m$ -matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis gcd(a,b) er største felles divisor for a og b og lcm(a,b) er minste felles multiplum for a og b , så er $ab = \text{gcd}(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

- 1) $a \equiv b \pmod{m}$ hvis og bare hvis $a \text{ mod } m = b \text{ mod } m$
- 2) $a \equiv b \pmod{m}$ og $c \equiv d \pmod{m}$, så er $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ og $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b - a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a + b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(a, b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(b, a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.