

Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 04.12.2015

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 11

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Eva Hadler Vihovde

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Eva Hadler Vihovde				

Emnekode: DAPE1300 – ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Dette kan gjøres ved at du for eksempel tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Spesielt gjelder dette svar der det kun foreligger to alternativer. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) Gitt utsagnene

p : «Det snør»

q : «Det er kuldegrader»

Sett opp følgende fire utsagn ved hjelp av p , q og logiske operatorer:

- i) «Det snør ikke og det er kuldegrader.»
- ii) «Hvis det snør, så er det kuldegrader.»
- iii) «Det snør bare hvis det er kuldegrader.»
- iv) «Det snør ikke hvis det ikke er kuldegrader.»

Er noe to eller flere av utsagnene ekvivalente? Begrunn svaret.

b) Et utsagn kalles en selvmotsigelse (eng. *contradiction*) hvis utsagnet alltid er usant. La p og q være vilkårlige utsagn. Bruk sannhetsverditabell til å avgjøre om følgende sammensatte utsagn er en selvmotsigelse:

$$\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$$

c) $P(x)$ og $Q(x)$ er to utsagnsfunksjoner der x representerer en student.

Gitt utsagnene:

$P(x)$: « x har bestått arbeidskravene i Diskret matematikk»

$Q(x)$: « x skal ta eksamen i Diskret matematikk»

Skriv følgende utsagn ved hjelp av x , $P(x)$ og $Q(x)$, kvantorer og logiske operatorer:

- i) «Alle som har bestått arbeidskravene i Diskret matematikk, skal ta eksamen i Diskret matematikk.»

- ii) «Ikke alle har bestått arbeidskravene i Diskret matematikk.»
- iii) «Det er en som skal ta eksamen i Diskret matematikk,
men som ikke har bestått arbeidskravene i Diskret Matematikk.»

Oppgave 2

- a) La mengdene A og B være gitt ved:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ og } B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Finn mengdene:

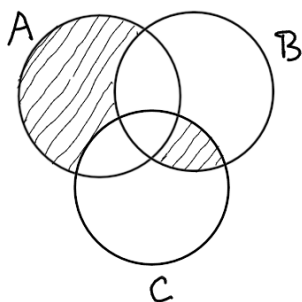
$$A \cup B, A \cap B, A - B, (A \cup B) - (A \cap B) \text{ og } (A - B) \cup (B - A).$$

- b) La A og B være vilkårlige delmengder av en universalmengde U .

Tegn et Venn-diagram og skravler mengden:

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$$

- c) Finn en mengdeformel med A , B og C for det skraverte området i Venn-diagrammet under:



Oppgave 3

A er mengden av de ikke-negative hele tallene, dvs. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ og er både definisjonsmengde og verdiområdet for funksjonene f og g .

La f og g være definert ved:

$$f: A \rightarrow A \text{ der } f(x) = x \bmod 7$$

$$g: A \rightarrow A \text{ der } g(x) = x \div 7$$

- a) Finn $f(x)$ og $g(x)$ for $x = 6$, $x = 8$, og $x = 14$.
- b) Finn verdimengdene til f og g .
- c) Avgjør om funksjonene f og g er **en-til-en** og/eller **på**.
Begrunn svarene!

Oppgave 4

Gitt tallmatrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Bestem dimensjonene til A , B og C .
- b) Avgjør hvilket av matriseproduktene AB , BA , AC og BC som er definert, og bestem i så fall hvilken dimensjon de har.
- c) Regn ut de matriseproduktene som er definert.

Oppgave 5

- a) Gitt heltallet $a = 110100010100111101100101_2$ på binær form.
Hva blir tallet på:

- i) Heksadesimal form
- ii) Oktal form
- iii) Desimal form

- b) Studer følgende rekker:

- i) $12 + 17 + 22 + 27 + \dots + 77$
- ii) $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 1536$

Avgjør hva slags rekker det er, og bestem rekkesummen for hver av dem.

Oppgave 6

- a) Finn største felles divisor (*eng. greatest common divisor*) for tallene 840 og 144 ved å bruke primtallsfaktorisering.
- b) Finn største felles divisor for 840 og 144 ved å bruke Euklids algoritme.
- c) Minste felles multiplum (*eng. least common multiple*) av to heltall a og b er det minste positive heltallet som både a og b går opp i.

Finn minste felles multiplum for 12 og 15.
- d) Hvor mange tall mellom 1 og 1000 er delelig med 12 eller 15, eller både 12 og 15?

Oppgave 7

- a) Hvor mange gyldige pinkoder på 4 siffer, der første siffer er forskjellig fra 0, finnes det?
- b) En artist har gitt ut to album med til sammen 20 sanger. Han skal lage et konsertprogram med 10 sanger hentet fra disse to albumene. Hvor mange forskjellige konsertprogram er det mulig å sette opp når rekkefølgen på sangene spiller en rolle?
- c) I en klasse med 24 studenter skal det velges en gruppe på 4 studenter som skal arrangere semesteravslutning for klassen. Hvor mange forskjellige grupper er det mulig å velge?
- d) På hvor mange måter kan bokstavene i ordet LAMAMBA stokkes om?

Oppgave 8

La P_n være påstanden om at

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

dvs.
$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

- a) Vis at P_1 , P_2 og P_3 gjelder.
- b) Vis ved induksjon at P_n gjelder for $n \geq 1$.

Oppgave 9

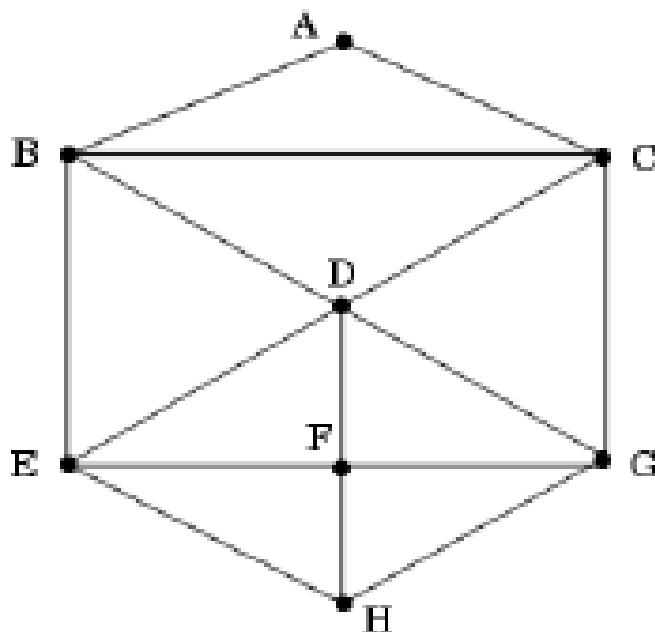
Gitt differensligningen

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$

- Finn a_2 og a_3 .
- Finn en formel for a_n . Vis at formelen din stemmer ved å sette inn $n = 2$ og $n = 3$. Da skal du få de samme resultatene som i punkt a).

Oppgave 10

Gitt følgende urettede graf:



- Hvor mange punkter har grafen? Skriv opp graden til hvert punkt og finn summen av gradene.
- Bruk resultatet i punkt a) til å finne antall kanter i grafen.
- Finnes det en lukket *Euler-vei* i grafen? Finnes det en åpen *Euler-vei* i grafen?
- Skriv opp den aktuelle *Euler-veien* (dvs. punktene på veien) hvis du svarte ja på et av spørsmålene i punkt c).

Vedlegg.

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Noen mengdeidentiteter:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Funksjoner:

I funksjonen $f: A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B) \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^T og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^T , andre rad i A blir andre kolonne i A^T , osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $m \times n$ -matrise, så blir A^T en $n \times m$ -matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at $a \text{ div } d = q$ og $a \text{ mod } d = r$.

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis $\text{gcd}(a,b)$ er største felles divisor for a og b og $\text{lcm}(a,b)$ er minste felles multiplum for a og b , så er $ab = \text{gcd}(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

- 1) $a \equiv b \pmod{m}$ hvis og bare hvis $a \text{ mod } m = b \text{ mod } m$
- 2) $a \equiv b \pmod{m}$ og $c \equiv d \pmod{m}$, så er $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ og $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^n ar^k = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \frac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\frac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1) \cdots (n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst

én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis det karakteristiske polynomiet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomiet har kun én løsning r_0 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, så er $(a, c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(a, b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(b, a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.