

Løsningsforslag i Diskret matematikk, våren 2017

Oppgave 1

i) a) $p \wedge p \wedge \neg q$ b) $(p \wedge \neg r) \rightarrow q$

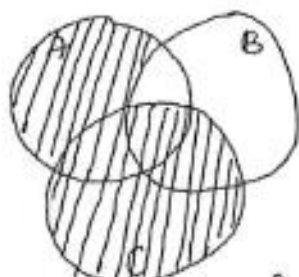
ii)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee \neg q$	$q \vee \neg r$	$r \vee \neg p$	$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
S	S	S	U	U	U	S	S	S	S
S	S	U	U	U	S	S	U	U	U
S	U	S	U	S	U	S	S	S	U
S	U	U	U	S	S	S	S	U	U
U	S	S	S	U	U	S	S	S	U
U	S	U	S	U	S	U	S	S	U
U	U	S	S	S	U	U	S	S	U
U	U	U	S	S	S	S	S	S	S

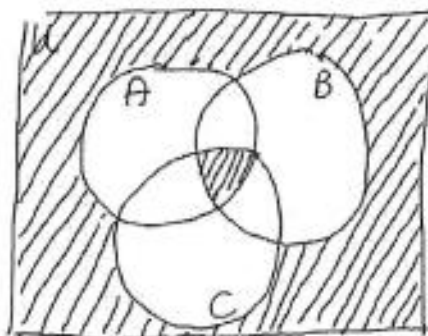
Vi ser at det sammensatte utsagnet $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ er sant enten når p, q og r alle er sanne eller når p, q og r alle er usanne.

Oppgave 2

i)

 $(A - B) \cup C$ er skravert

ii)

 $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ er skravert.

OBS I Oppgave 1 ii) inngår logiske utsagn, mens det her i 2 ii) brukes mengder. Hvis vi gjør om 1 ii) til mengder, får vi at mengdene

$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ og $(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{C}) \cap (C \cup \bar{A})$ er like.

Oppgave 3

i) A er mengden av alle bitsekvenser av lengde 8.

Det finnes $2^8 = 256$ forskjellige bitsekvenser av lengde 8. Dermed $|A| = 256$.

ii) Mulige funksjonsverdier er $8-0=8$, $7-1=6$, $6-2=4$, $5-3=2$, $4-4=0$, $3-5=-2$, $2-6=-4$, $1-7=-6$ og $0-8=-8$. Dermed blir $V = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$.

f er ikke en-til-en. La f.eks. $a = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ og $b = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Da er $f(a) = 7-1=6$ og $f(b) = 7-1=6$. Men $a \neq b$. f er ikke på siden $V \neq \mathbb{Z}$.

iii) $X_0 = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, dvs. X_0 er mengden av de bitsekvensene av lengde 8 som har like mange 1-biter og 0-biter. Da må det være 4 1-biter og 4 0-biter. De 4 1-bitene kan plasseres på $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$ forskjellige måter. Dermed $|X_0| = 70$.

Mengden X_1 er tom fordi det finnes ingen bitsekvens a der $f(a) = 1$ siden 1 ikke er i verdismengden V .

Mengden X_2 er mengden av de bitsekvensene av lengde 8 som har 5 1-biter og 3 0-biter. Dermed blir

$$|X_2| = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56.$$

Oppgave 4

- i) Ved kun å bruke lodd på 5 kg kan vi få
 flg. sammenlagte vekter: $0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots$
 Ved kun å bruke lodd på 7 kg kan vi få flg.
 sammenlagte vekter: $0, 7, 14, 21, 28, \dots$

En sammenlagt vekt på 35 kg kan oppnås på
 to forskjellige måter: 1) 7 lodd à 5 kg eller
 2) 5 lodd à 7 kg.

- ii) Vi kan få 22 kg ved å bruke 3 lodd à 5 kg og
 et lodd à 7 kg ($3 \cdot 5 + 7 = 22$). Vi kan få 24 kg
 ved å bruke 2 lodd à 5 kg og 2 lodd à 7 kg
 ($2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 24$). Vi ser fort at det ikke er mulig
 å få til 23 kg.

- iii) La $P(n)$ bety at vi kan få en sammenlagt vekt
 på n kg ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg.

1) $P(24)$ er sann, dvs. $P(n)$ sann for $n=24$.

2) Anta at $P(k)$, $k \geq 24$ er sann, dvs. det
 finnes hele ikke-negative tall a og b slike at

$$k = 5a + 7b$$

$$\text{Hvis } b \geq 2, \text{ får vi } k+1 = 5a + 7(b-2+2) + 1 \\ = 5a + 7(b-2) + 15 = 5(a+3) + 7(b-2).$$

Dermed kan en vekt på $k+1$ oppnås med $a+3$ lodd
 à 5 kg og $b-2$ lodd à 7 kg.

Hvis $b < 2$, må $a \geq 4$ siden $5a + 7b \geq 24$.

$$\text{Dermed } k+1 = 5(a-4+4) + 7b + 1 = 5(a-4) + 7b + 21$$

$= 5(a-4) + 7(b+3)$. I dette tilfellet får vi en vekt på $k+1$ kg ved å bruke $a-4$ bodd å 5 kg og $b+3$ bodd å 7 kg.

Vi har dermed vist at hvis $P(k)$ er sann, $k \geq 24$, så er $P(k+1)$ sann. Induksjonsprinsippet gir da at $P(n)$ er sann for alle $n \geq 24$.

Oppgave 5

i)
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 8 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 579 & 72 & 9 & 1 & 0 \end{array} \quad 579_{10} = 1103_8$$

ii)
$$1234_8 = \overbrace{00}^1 \overbrace{10}^2 \overbrace{10}^3 \overbrace{11}^4 \overbrace{100}^5_2 = \overbrace{0010}^2 \overbrace{1001}^9 \overbrace{1100}^C_2 = 29C_{16}$$

$$= (2 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16 + 12)_{10} = (512 + 144 + 12)_{10} = 668_{10}.$$

iii)
$$\begin{array}{r} c = 10110110_2 \\ d = 10110012_2 \\ \hline c+d = 100001111 \end{array}$$

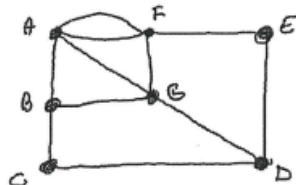
Oppgave 6

a) $\text{grad}(A)=3, \text{grad}(B)=3, \text{grad}(C)=2, \text{grad}(D)=3,$
 $\text{grad}(E)=2, \text{grad}(F)=3, \text{grad}(G)=4.$

b) Grafen har fire punkter med oddetall grad.
 Da finnes det ingen hvilken lukket eller ikke-lukket Euler-vei. I så fall måtte grafen enten ha ingen punkter med oddetall grad eller nøyaktlig to punkter med oddetall grad.

c) Hvis vi setter på en ekstra kant mellom f.eks.

A og F, dvs. slik:



så vil B og D få oddetall grad og alle de andre paritetssgrad. Dermed får vi en ikke-lukket Euler-vei. Veiens mål står i ett av de to punktene med oddetall grad og ender i det andre. F.eks. slik:

B-C-D-E-F-A-B-G-A-F-G-D

Oppgave 7.

$$i) A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-1 \\ 1-1 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2A-3B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2-3 \\ 2-3 & 0-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$ii) AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) a) $\forall A \forall B P(A, B)$ er usant fordi det ikke er sant at $AB=BA$ for alle A og B . La B være som C i ii). Da blir $AB \neq BA$.

b) $\forall A \exists B P(A, B)$ er sant. Vi kan la $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da vil $AI = IA$ for alle A .

c) $\exists A \forall B P(A, B)$ er sant. La $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da vil $IB = BI$ for alle B .

d) $\exists A \exists B P(A, B)$ er sant. La f.eks (se ii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Da er } AB = BA.$$

Oppgave 8

$$i) \sum_{k=0}^m 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^m = \frac{3^{m+1} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} (3^{m+1} - 1).$$

$$ii) a_1 = a_0 + 3^1 = 1 + 3 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$a_3 = a_2 + 3^3 = 13 + 27 = 40$$

$$a_4 = a_3 + 3^4 = 40 + 81 = 121$$

$$iii) a_n = s a_{n-1} + t a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 4$$

$$a_2 = s a_1 + t a_0 = 4s + t = 13$$

$$a_3 = s a_2 + t a_1 = 13s + 4t = 40$$

Vi må finne s og t av ligningene:

$$4s + t = 13$$

$$13s + 4t = 40$$

$$t = 13 - 4s, \quad 13s + 4(13 - 4s) = 40, \quad -3s = -12, \\ s = 4 \text{ og dermed } t = -3.$$

Differensligningen blir derfor $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$.

Karakteristiske polynom: $\pi^2 = 4\pi - 3$. Røttene blir $\pi_1 = 3$ og $\pi_2 = 1$.

Generell løsning: $a_n = \alpha 3^n + \beta 1^n = \alpha 3^n + \beta$.

$$a_0 = \alpha + \beta = 1, \quad a_1 = 3\alpha + \beta = 4$$

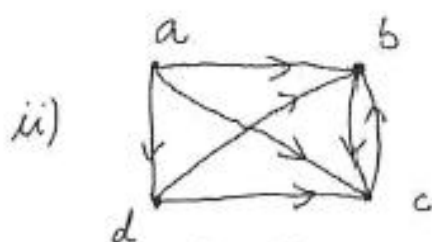
Det $\alpha = \frac{3}{2}$ og $\beta = -\frac{1}{2}$. Dermed

$$a_n = \frac{3}{2} 3^n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1).$$

$$a_5 = \frac{1}{2} (3^6 - 1) = \frac{1}{2} (729 - 1) = 364.$$

Oppgave 9

$$i) M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$iii) M \oplus M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er 6 1-ere i $M \oplus M$. Dermed er det 6 veier med lengde 2.

Oppgave 10

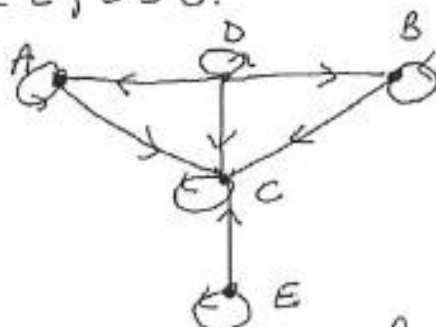
$$i) C = A \cup B = \{a, b, c, d\}, D = A \cap B = \{b, c\},$$

$$E = (A - B) \cup (B - A) = \{a, d\}.$$

$$ii) A \subseteq A, A \subseteq C, B \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq C, D \subseteq D, D \subseteq A,$$

$$D \subseteq B, D \subseteq C, E \subseteq E, E \subseteq C.$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- a) R er reflektiv siden M har 1-ere på hoveddiagonalen.
- b) R er antisymmetrisk. Det er ingen piler begge veier mellom to noder i grafen.
- c) R er transitiv. Det gjelder generelt for mengder. Hvis $X \subseteq Y$ og $Y \subseteq Z$, så er $X \subseteq Z$.

R er dermed en partiell ordning.

