Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Nyl utsatt

Eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 22. februar 2017

Tid: 5 timer / kl. 9 - 14

Antall sider (inkl. forside): 10

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler:
Forhåndsgodkjent ordbok. Håndholdt kalkulator som ikke kommuniserer trådløst og som ikke kan regne symbolsk.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Eva Hadler Vihovde

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	
Eva H. Vihovde Eva Hadler Vihovde				L. Hel...

Emnekoder: DAPE1300 – ITPE1300

Alle oppgaver teller likt. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave.

Alle svar skal begrunnes! For eksempel ved å ta med mellomregninger eller ved å gi annen form for argumentasjon.

Oppgave 1

i) Utsagnene p, q og r er gitt ved p : *Det snør*, q : *Det er kuldegrader* og r : *Det blåser*. Skriv utsagnene "*Det blåser og snør, men det er ikke kuldegrader*" og "*Hvis det snør og er vindstille, så er det kuldegrader*" ved hjelp av p, q, r og logiske operatorer.

ii) La nå p, q og r være vilkårlige logiske utsagn. Bruk en sannhetsverditabell til å avgjøre for hvilke verdier av p, q og r det sammensatte utsagnet $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ er sant.

Oppgave 2

La A, B og C være tre vilkårlige delmengder i en universalmengde U.

i) Tegn et Venn-diagram og skravér mengden $(A - B) \cup C$.

ii) Tegn et Venn-diagram og skravér mengden $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

Oppgave 3

La A være mengden av alle bitsekvenser av lengde 8 og Z de hele tallene, dvs. $Z = \{. \; . \; . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \; . \; . \; .\}$. La funksjonen $f : A \to Z$ være definert ved at for hver $a \in A$ er $f(a)$ lik differansen mellom antall 1-biter og antall 0-biter i bitsekvensen a. Hvis f.eks. $a = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ er $f(a) = 3 - 5 = -2$ og hvis $a = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ er $f(a) = 6 - 2 = 4$.

i) Hva blir $|A|$, dvs. hvor mange elementer har A?

ii) Finn verdimengden V til f. Er f en til en? Er f på? Begrunn svarene!

iii) La mengden $X_n = \{a \in A \mid f(a) = n\}$. Finn $|X_0|$, $|X_1|$ og $|X_2|$.

Oppgave 4

Anta at vi har lodd på 5 kg og 7 kg. Hvis vi for eksempel tar to lodd på 5 kg og et lodd på 7 kg, blir den sammenlagte vekten 17 kg. Hvis vi tar tre lodd på 7 kg lodd og ingen lodd på 5 kg, blir vekten til sammen 21 kg.

i) Hvilke sammenlagte vekter kan vi få til ved å bruke kun lodd på 5 kg? Hva hvis vi kun kan bruke lodd på 7 kg? Er det noen sammenlagt vekt vi kan få til på flere enn én måte ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg?

ii) Er det mulig å få en sammenlagt vekt på 22 kg ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg? Hva med en sammenlagt vekt på 23 kg? Hva med 24 kg? Begrunn svarene!

iii) La n være et vilkårlig heltall større enn eller lik 24. Det er mulig å få en sammenlagt vekt på n kg ved å legge sammen lodd på 5 og 7 kg? Vis dette for eksempel ved hjelp av induksjon på n.

Oppgave 5

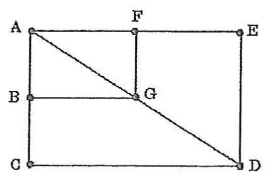
i) Tallet $a = 579_{10}$ er gitt på desimal form. Finn tallet på oktal form. Begrunn svaret!

ii) Tallet $b = 1234_8$ er gitt på oktal form. Finn tallet på binær form, på heksadesimal form og på desimal form. Begrunn svarene!

iii) Tallene $c = 10110110_2$ og $d = 1011001_2$ er gitt på binær form. Finn summen $c + d$ på binær form og da helst ved å bruke binær addisjon. Begrunn svaret!

Oppgave 6

Følgende figur inneholder en graf med syv punkter, dvs. A, B, C, D, E, F og G.



i) Finn graden til hvert av de 7 punktene i grafen.

ii) Har grafen en lukket Euler-vei? Har grafen en åpen Euler-vei?

iii) Er det mulig å utvide grafen med kun én ekstra kant slik at den da får en lukket eller åpen Euler-vei? Sett i så fall opp denne veien.

Oppgave 7

Gitt tallmatrisene $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ og $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

i) Finn matrisene $A+B$, $A-B$ og $2A-3B$.

ii) Finn matriseproduktene AB , BA , AC og CA.

La nå A og B være vilkårlige 2 x 2 – matriser der ikke alle elementene er 0. La $P(A,B)$ være utsagnet $AB=BA$.

iii) Avgjør hvilke av følgende utsagn som er sanne: $\forall A\forall B\ P(A,B)$, $\forall A\ \exists B\ P(A,B)$, $\exists A\forall B\ P(A,B)$ og $\exists A\ \exists B\ P(A,B)$. Svarene skal begrunnes!

Oppgave 8

i) Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke til å finne en formel for summen $1+3+3^2+3^3+\ .\ .\ .\ .\ +3^n=\sum_{k=0}^{n}3^k$.

ii) Gitt differensligningen $a_n=a_{n-1}+3^n$, $a_0=1$. Finn a_1 , a_2 , a_3 og a_4 .

iii) De verdiene du finner i punkt *ii)* vil være leddene i en følge som passer inn i en differensligning av formen $a_n=s\,a_{n-1}+t\,a_{n-2}$, $a_0=1$, $a_1=4$ der s og t er to tallkonstanter. Finn s og t. Bruk så det til å finne en formel for a_n. Finn til slutt a_5 ved å sette inn i formelen.

Oppgave 9

Mengden A er gitt ved $A=\{a,b,c,d\}$. La R være relasjonen på A gitt ved $R=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(c,b),(d,c),(d,b)\}$.

i) Finn matrisen M til relasjonen R.

ii) Finn grafen til relasjonen R.

iii) Finn det logiske matriseproduktet $M\odot M$. Hvor mange veier med lengde 2 er det i grafen til R. Begrunn svaret!

Oppgave 10

Gitt mengdene $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{b, c, d\}$.

i) Finn mengdene $C = A \cup B$, $D = A \cap B$ og $E = (A - B) \cup (B - A)$.

La X være den mengden som har mengdene A, B, C, D og E over som elementer, dvs. $X = \{A, B, C, D, E\}$. Husk at elementene i en mengde kan selv være mengder. Vi definerer en relasjon R på X ved at for hvert par av elementer U, V i X er U relatert til V (dvs. $U\,R\,V$) hvis og bare hvis $U \subseteq V$.

ii) Finn matrisen og grafen til R. Er R en partiell ordning? Begrunn svaret!

Vedlegg

Definisjoner og formler

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f: A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B)\, \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^{T} og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^{T}, andre rad i A blir andre kolonne i A^{T}, osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $\mathrm{m} \times \mathrm{n}-$ matrise, så blir A^{T} en $\mathrm{n} \times \mathrm{m}-$ matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \le r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at a div $d = q$ og $a \bmod d = r$.

Største felles divisor
Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum
Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis $\gcd(a,b)$ er største felles divisor for a og b og $lcm(a,b)$ er minste felles multiplum for a og b, så er $ab = \gcd(a,b) \cdot lcm(a,b)$

Moduloregning:

La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a - b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

1) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ hvis og bare hvis $\mathrm{a} \bmod \mathrm{m} = \mathrm{b} \bmod \mathrm{m}$
2) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{c} \equiv \mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$, så er $\mathrm{a}+\mathrm{c} \equiv \mathrm{b}+\mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bd} \pmod{\mathrm{m}}$.

Tverrsum

La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}, \; r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La a være første ledd, b siste ledd og d differensen mellom to og to ledd. Antall ledd n er gitt ved $n = \dfrac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\dfrac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging:	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$
Uordnet uten tilbakelegging:	$\binom{n}{r}$
Ordnet med tilbakelegging:	n^r
Uordnet med tilbakelegging:	$\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:

Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A.

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon

En samling delmengder A_1, A_2, A_3, . . . , A_n av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \ \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser

Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a. Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A.

Delvis- eller partiell ordning

En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ $(b \neq a)$ slik at $(a,b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ $(b \neq a)$ slik at $(b,a) \in R$.

Grafteori:

Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:

La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:

En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.