Fakultet for teknologi, kunst og design

Teknologiske fag

Ny/utsatt eksamen i: Diskret matematikk

Målform: Bokmål

Dato: 24.02.2016

Tid: 5 timer/kl. 09 - 14

Antall sider (inkl. forside): 10

Antall oppgaver: 10

Tillatte hjelpemidler: HÅNDHOLDT KALKULATOR SOM IKKE KAN KOMMUNISERE TRÅLØST OG SOM IKKE KAN REGNE SYMBOLSK. FORHÅNDSGODKJENT ORDBOK.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.

Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.

Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder: Eva Hadler Vihovde

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Programkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Programkoordinator	

Emnekode: DAPE 1300 - ITPE1300

Alle de 10 oppgavene teller likt. I oppgaver med underpunkter vil krevende og mer omfattende underpunkter kunne telle mer enn lette og enkle underpunkter. Det er ikke slik at lette oppgaver kommer først og vanskelige til slutt. Bruk derfor ikke for mye tid på en oppgave du ikke får til. Prøv isteden en ny oppgave. **Alle svar skal begrunnes!** Dette kan gjøres ved at du for eksempel tar med mellomregninger eller gir andre former for argumentasjon. Spesielt gjelder dette svar der det kun foreligger to alternativer. **Kun et svar uten noen begrunnelse er normalt verdiløst.**

Oppgave 1

a) Gitt følgende utsagn:

p: «Jeg kjører bil.»
q: «Jeg har førerkort.»
r: «Jeg kjører bil bare hvis jeg har førerkort.»
s: «Hvis jeg ikke kjører bil, så er har jeg ikke førerkort.»
t: «Jeg har førerkort hvis jeg kjører bil.»

Skriv de sammensatte utsagnene *r*, *s* og *t* ved hjelp av utsagnene *p* og *q* og logiske operatorer. Hvordan vil du skrive uttrykkene hvis du kun skal bruke operatorene $\wedge$, $\vee$ og $\neg$?

b) La *p, q* og *r* være vilkårlige logiske utsagn. Avgjør om de to sammensatte utsagnene

$(p \rightarrow q) \rightarrow r$ og $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ er ekvivalente.

Svaret skal begrunnes.

c) La *m* og *n* være hele tall. Formuler følgende fire utsagn med ord og avgjør om de som er sanne eller usanne:

i) $\forall m \exists n (n^2 = m)$
ii) $\forall m \forall n (mn > n)$
iii) $\exists m \forall n (n^2 = m)$
iv) $\forall m \exists n (n^2 - m < 100)$

Svarene skal begrunnes.

Oppgave 2

a) La $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ og $C = \{3, 5, 6, 7\}$.

Bestem mengdene

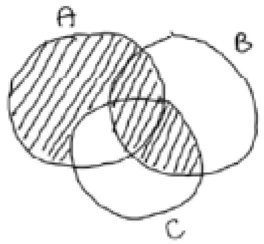
i) $A \oplus B$
ii) $(A \oplus B) \oplus C$

b) La A, B og C være vilkårlige delmengder i en universalmengde U.
Tegn Venndiagram og skraver mengdene

i) $(A - B) \cup C$

ii) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

c) Nedenfor ser du et Venndiagram. Bestem, ved hjelp av A, B, C og mengdeoperatorer, uttrykket for mengden som svarer til det skraverte området.



Oppgave 3

La mengden N være de naturlige tallene, dvs. $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
La funksjonen $f: N \to N$ være definert ved $f(k) = (k \bmod 3) + (k \bmod 7)$.

a) Finn $f(0), f(4), f(10)$ og $f(12)$.

b) Avgjør om det finnes en $k \in N$ slik at

i) $f(k) = 9$

ii) $f(k) = 8$

og bestem i så fall en verdi for *k*.

c) Finn verdimengden til f. Er f *en-til-en*? Er f *på*?

Begrunn svarene.

Oppgave 4

Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) For at et matriseprodukt skal være definert stilles et bestemt krav til dimensjonene til matrisene som inngår i produktet. Hvilket krav er det? Avgjør hvilke av følgende matriseprodukt som er definert, og bestem i så fall hvilke dimensjoner de har:

i) AB

ii) BA

iii) AC
iv) CA
v) BC
vi) CB

b) Regn ut to av de definerte matriseproduktene.

Oppgave 5

Gitt mengden $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) Hvor mange uordnede utvalg (uten tilbakelegging) på tre tall kan vi velge fra A?

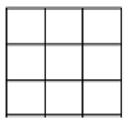
b) Det finnes til sammen åtte utvalg av typen fra punkt a) der summen av tallene i utvalget er 15. Et eksempel på et slikt utvalg er $\{1, 5, 9\}$.

Bestem de 7 resterende utvalgene med denne egenskapen. (Hint: Finn først alle utvalgene der 1 inngår, finn så alle utvalgene der 2 inngår men ikke 1, deretter alle utvalgene der 3 inngår men ikke 1 og 2, osv.)

c) La så n være et tall fra A og la a_n være antall utvalg med sum lik 15 der n inngår. (Eks: Hvis tallet 1 er med i kun to av utvalgene der summen av tallene er 15 så er $a_1 = 2$.)

Bestem a_n for alle $n \in A$.

d) De ni tallene i A skal plasseres i hver sin rute i et 3x3-kvadrat tilsvarende kvadratet du ser på figuren:



Hvis tallene plasseres slik at summen av tallene horisontalt, vertikalt og langs begge diagonalene er 15, kalles kvadratet for et «magisk kvadrat».

i) Plasser de ni tallene i kvadratet over slik at du får et magisk kvadrat. (Hint: Tallene i de forskjellige rutene vil inngå i ulikt antall summer. Tallet i midten vil for eksempel inngå i fire summer. Hvilket tall må følgelig stå der?)

ii) Hvor mange forskjellige magiske 3x3-kvadrater er det?

Oppgave 6

a) Tallet $a = 579_{10}$ er gitt på desimal form. Finn tallet på oktal form.

b) Tallet $b = 1234_8$ er gitt på oktal form. Finn tallet på binær form, heksadesimal form og desimal form.

c) Tallene $c = 10110110_2$ og $d = 1011001_2$ er gitt på binær form. Finn summen $c + d$ på binær form ved hjelp av binær addisjon.

Alle svarene må begrunnes ved at du viser hvilken fremgangsmåte du har brukt.

Oppgave 7

a) Gitt tallene 1, 2, 3, 4, 5.

i) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 som første tall?
ii) Hvor mange permutasjoner har tallet 1 som første tall og tallet 3 i midten?
iii) Hvor mange permutasjoner har 1 som første tall eller tallet 3 i midten eller tallet 5 bakerst?

b) Avgjør typen til følgende rekker og bestem summen til hver av dem:

i) $3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + \ldots + 3072$

ii) $20 + 23 + 26 + 29 + \ldots + 98 + 101$

Oppgave 8

Gitt differensligningen $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \ \ der \quad n > 1, \quad a_0 = 3, \quad a_1 = 5$.

a) Finn a_2 og a_3.

b) Finn a_n ved å løse differensligningen.

c) Bestem a_2, a_3 og a_4 ved hjelp formelen for a_n som du fant i punkt b) og sjekk at svarene du får stemmer med de du får når du bruker den oppgitte differensligningen.

Oppgave 9

Gitt $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ og relasjonen R på A slik at $R = \{(a, b) \in A \mid a \in A, b \in A, \gcd(a, b) = 1\}$.
Når $\gcd(a, b) = 1$ er a og b innbyrdes primiske.

a) Sett opp R som en mengde av tallpar.

b) Tegn grafen til R.

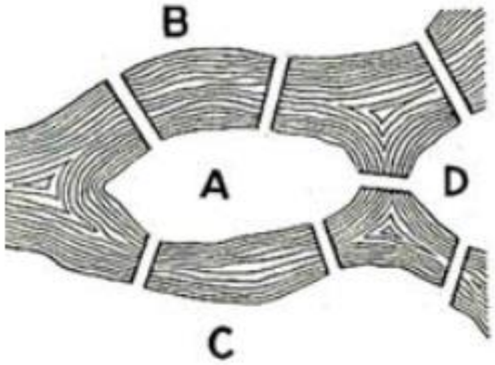
c) Finn matrisen til R.

d) Er R

i) refleksiv?
ii) symmetrisk?
iii) transitiv?

Alle svarene må begrunnes.

Oppgave 10



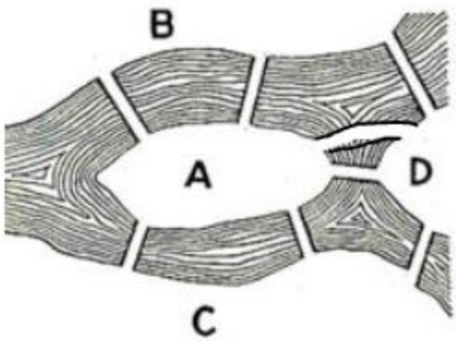
«Broene i Kønigsberg» er et eksempel på hvordan et praktisk problem kan oversettes til et grafproblem. Bildet over viser elven som renner gjennom Kønigsberg og broene som forbinder elvebreddene B, C, D og øya A med hverandre. Spørsmålet som innbyggerne i Kønigsberg stilte seg på 1700-tallet var om det var mulig å gå en spasertur der man passerer alle broene en og kun en gang? Matematikeren Leonard Euler løste problemet i 1736. En vei gjennom en graf, der alle kantene passeres en og kun en gang er senere blitt hetende «en Euler-vei».

a) Tegn opp grafen som representerer problemet. La A, B, C og D være punkter i grafen, mens broene er kanter mellom punktene.

b) Sett opp graden til hvert av punktene i grafen.

c) Er det mulig å finne en vei gjennom grafen som besvarer spørsmålet innbyggerne i Kønigsberg stilte seg? Begrunn svaret.

d) Tenk deg at det blir bygget en bro til mellom A og D:



Blir det nå mulig eller umulig å gå en spasertur der man passerer alle broene en og kun en gang? Begrunn svaret.

e) Hvis du svarte ja på spørsmålet under punkt c) eller punkt d), skriv i så fall opp en slik Euler-vei. Er det en lukket eller åpne Euler-vei?

Vedlegg.

Logiske operatorer:

$\neg$ (ikke), $\wedge$ (og), $\vee$ (eller), $\oplus$ (eksklusiv eller), $\rightarrow$ (implikasjon)

Noen ekvivalenser fra utsagnslogikk:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\quad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ $\quad$ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad$ $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Noen mengdeidentiteter:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Kardinalitet – antallet elementer i en union:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Funksjoner:

I funksjonen $f : A \rightarrow B$ betyr A definisjonsmengde og B verdiområde. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er en-til-en hvis $a_1, a_2 \in A$ og $a_1 \neq a_2$, medfører at $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er på hvis $\forall (b \in B)\ \exists (a \in A)$ slik at $f(a) = b$.

Matriser

Den transponerte til en matrise A betegnes med A^{T} og er den matrisen vi får når radene og kolonnene i A byttes om. Første rad i A blir første kolonne i A^{T}, andre rad i A blir andre kolonne i A^{T}, osv. Det betyr spesielt at hvis A er en $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ – matrise, så blir A^{T} en $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$ – matrise.

Heltallsdivisjon (divisjonsalgoritmen), div og mod:

La a være et heltall og d et positivt heltall. Da finnes entydige heltall q og r med $0 \leq r < d$ slik at $a = dq + r$. Operasjonene **div** og **mod** defineres ved at

a div $d = q$ og $a \bmod d = r$.

Største felles divisor

Største felles divisor (greatest common divisor – gcd) for to hele tall som ikke begge er 0, er det største heltallet som går opp i begge tallene.

Minste felles multiplum

Minste felles multiplum (least common multiple – lcm) for to positive heltall er det minste positive heltallet som begge går opp i.

Formel gcd(a,b) og lcm(a,b): Hvis $\gcd(a,b)$ er største felles divisor for a og b og $lcm(a,b)$ er minste felles multiplum for a og b, så er $ab = \gcd(a,b)\cdot lcm(a,b)$

Moduloregning:
La m være et positivt heltall. To heltall a og b kalles kongruente *modulo* m hvis m går opp i $a-b$ og det betegnes med $a \equiv b \pmod{m}$.

1) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ hvis og bare hvis a $\mathrm{mod\ m}$ = b $\mathrm{mod\ m}$
2) $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{c} \equiv \mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$, så er $\mathrm{a}+\mathrm{c} \equiv \mathrm{b}+\mathrm{d} \pmod{\mathrm{m}}$ og $\mathrm{ac} \equiv \mathrm{bd} \pmod{\mathrm{m}}$.

Tverrsum
La a være et positivt heltall. Tverrsummen til a er kongruent med a modulo 9.

Summen av rekker:

Geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n} a r^k = a\dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$

Aritmetisk rekke: La *a* være første ledd, *b* siste ledd og *d* differensen mellom to og to ledd. Antall ledd *n* er gitt ved $n = \dfrac{b-a}{d} + 1$ og summen er lik $\dfrac{(a+b)n}{2}$

Binomialkoeffisienter:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Binomialteoremet:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Antall forskjellige utvalg på r stykker fra en samling på n stykker:

Ordnet uten tilbakelegging: $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

Uordnet uten tilbakelegging: $\binom{n}{r}$

Ordnet med tilbakelegging: n^r

Uordnet med tilbakelegging: $\binom{n+r-1}{r}$

Det generelle «pigeonhole»-prinsippet:

Hvis N objekter skal plasseres i k bokser, må minst én boks inneholde minst $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objekter.

Differensligninger:
Den generelle lineære homogene differensligningen av orden 2 med konstante koeffisienter er på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

der c_1 og c_2 er konstanter. Ligningens karakteristiske polynom er gitt ved:

$$r^2 = c_1 r + c_2 .$$

Hvis det karakteristiske polynomet har to forskjellige reelle løsninger r_1 og r_2 , blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Hvis det karakteristiske polynomet har kun én løsning r_0, blir generell løsning lik $a_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n$ der α og β er vilkårlige konstanter. Hvis startbetingelsene a_0 og a_1 er gitt, finner en α og β ved å løse et ligningssystem.

Relasjoner:
En relasjon R på en mengde A er en delmengde av produktmengden $A \times A$.

La R være en relasjon på en mengde A .

R er refleksiv hvis $(a,a) \in R$ for alle $a \in A$.

R er symmetrisk hvis $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \in R$.

R er antisymmetrisk hvis $a \neq b$ og $(a,b) \in R$, så er $(b,a) \notin R$.

R er transitiv hvis $(a,b) \in R$ og $(b,c) \in R$, så er $(a,c) \in R$.

En partisjon
En samling delmengder A_1 , A_2 , A_3 , . . . , A_n av en mengde A utgjør en partisjon av A hvis $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ . \ \cup A_n = A$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$.

Ekvivalensrelasjoner
En relasjon R på en mengde A er en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Ekvivalensklasser
Hvis R er en ekvivalensrelasjon på en mengde A og $a \in A$, så er ekvivalensklassen $[a]$ til a definert ved $[a] = \{b \in A \,|\, (a,b) \in R\}$. Eller med ord: $[a]$ er lik mengden av de $b \in A$ som er relatert til a . Ekvivalensklassene til en relasjon utgjør en partisjon av A .

Delvis- eller partiell ordning
En relasjon R på en mengde A er en delvis ordning hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*. Hvis dette er oppfylt, sier vi at A er en delvis ordnet mengde (med hensyn på R). Et element $a \in A$ er et *maksimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(a,b) \in R$. Det betyr at det er ikke noe element som kommer «etter» a i ordningen. Tilsvarende er et element $a \in A$ et *minimalt* element hvis det ikke finnes noen $b \in A$ ($b \neq a$) slik at $(b,a) \in R$.

Grafteori:
Graden til et punkt. La a være et punkt (eng: vertex) i en urettet graf. Graden $grad(a)$ til a er antallet kanter knyttet til punktet.

Grad-kant-setningen:
La G være en urettet graf med endelig mange kanter. Da vil summen av gradene til punktene i G være dobbelt så stor som antallet kanter.

Eulers setning:
En sammenhengende urettet graf med minst to punkter har en lukket Euler-vei (en Euler-sykel) hvis og bare hvis alle punktene i grafen har partallsgrad.

En sammenhengende urettet graf har en åpen (ikke-lukket) Euler-vei hvis og bare hvis nøyaktig to punkter i grafen har oddetallsgrad.