

KOMBINATORIKK OG SANNSYNLIGHETSREGNING

FORTSETTELSE

Utvalg med tilbakelegging

Gitt n forskjellige objekter. Vi skal velge r objekter på en slik måte at for hvert objekt vi velger, noterer vi hvilket det er og legger det tilbake. Det betyr at *vi kan velge det samme objektet flere ganger*.

Ordnet r-utvalg med tilbakelegging

Hvis rekkefølgen objektene velges i har betydning kalles det *et ordnet r-utvalg med tilbakelegging*. (eng. *permutation with repetition*)

Det første objektet kan velges på n måter. Når objektet legges tilbake vil det også være n måter å velge neste objekt, osv. Dermed får vi følgende antall mulige utvalg:

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$$

Eksempel

Gitt bokstavene A, B og C. Hvor mange *ordnede 5-utvalg med tilbakelegging* finnes det?

Svar: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$

Uordnet r-utvalg med tilbakelegging

Hvis rekkefølgen objektene velges i ikke har betydning kalles det *et uordnet r-utvalg med tilbakelegging*. (eng. *combination with repetition*)

Eksempel

Gitt bokstavene A og B. Hvor mange *uordnede 3-utvalg med tilbakelegging* finnes det? Vi finner først alle ordnede 3-utvalg:

AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB

Vi fikk $2^3 = 8$ ordnede utvalg. De tre utvalgene med to A'er og en B kan sees på som samme utvalg når vi ser bort fra rekkefølgen. Tilsvarende for de tre utvalgene med utvalgene med to B'er og en A. Dermed er har vi kun fire forskjellige uordnede utvalg: AAA, AAB, BBA, BBB.

Ordet «tilbakelegging» er ikke like beskrivende i alle situasjoner. Det vi mener er at *samme (type) objekt kan velges mange ganger*.

Vi kan tenke oss at samlingen av objekter vi skal velge fra har nok eksemplarer av hvert type (n forskjellige typer) til å velge alle mulige r -utvalg. Vi skal se på eksempler på dette senere.

Følgende **formel** gjelder for uordnede utvalg med tilbakelegging:

$$\binom{n + r - 1}{r}$$

Men hvorfor er denne formelen riktig? La oss se på noen eksempler som kan belyse *hvordan* vi har kommet frem til den.

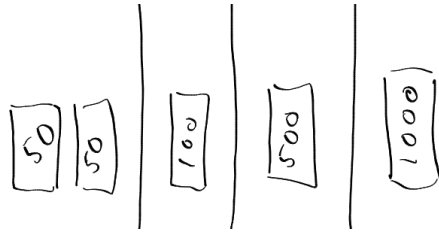
Eksempel 1

Tenk deg at vi har et kasseapparat med ulike seddeltyper. Vi har 50-lapper, 100-lapper 500-lapper og 1000-lapper. Hvor mange utvalg får vi hvis vi skal velge 5 sedler? NB! De trenger ikke være forskjellige, samme seddeltype kan velges flere ganger.

Vi får $n = 4$ (antall ulike seddeltyper) og $r = 5$ (antall sedler som skal velges for hvert utvalg). Siden samme seddeltype kan velges flere ganger og rekkefølgen som de velges i ikke spiller noen rolle får vi et uordnet 5-utvalg med tilbakelegging. Følgelig kan vi bruke formelen over.

Men la oss isteden se om vi kan løse oppgaven på en annen måte:

Anta at vi legger sedlene etter hverandre etter verdi, med 50-lappene lengst til venstre, så 100-lapper, så 500-lapper og 1000-lappene lengst til høyre. For å vite hvor skillene mellom de ulike seddeltypene går kan vi sette opp skillelinjer/streker:



Vi kan også representere det samme utvalget ved hjelp av kun to symboler, f.eks. stjerner og streker, der stjernene representerer sedler og skillelinjene representerer hvor skillene mellom de ulike seddeltypene går:

**** | * | * | ***

Plasserer vi stjernene skillelinjene annerledes, får vi et annet utvalg:

*** | ** | | ****

Dette utvalget representerer én 50-lapp, to 100-lapper og to 1000-lapper. Legg merke til at her er det ingen 500-lapper fordi de to skillelinjene lengst til høyre ikke har noen stjerne mellom seg.

Utvalget

| * | ** |**

representerer tre 100-lapper og to 500-lapper, mens det er ingen 50-lapper eller 1000-lapper i utvalget fordi det ikke er noen stjerner på hhv. venstre og høyre side av de ytterste strekene.

Vi kan altså representere alle utvalgene entydig ved hjelp av kun to symboler!

Dermed blir oppgaven å bestemme *på hvor mange måter vi kan plassere de 3 horisontale strekene?* Vi har til sammen 8 mulige posisjoner (antall stjerner + antall streker) vi kan plassere de 3 strekene på. I hvilken rekkefølge vi velger posisjonene i spiller imidlertid ingen rolle. Oppgaven er dermed redusert til et uordnet r-utvalg:

$$\binom{\text{Antall plasser \AA velge mellom}}{\text{Antall plasser som skal velges}} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

Men hvorfor fikk vi 3 streker? Jo, det var fordi vi hadde 4 typer ulike sedler, og da holdt det med én mindre for å skille seddeltypene fra hverandre.

I den opprinnelige beskrivelsen av problemet var antall seddeltyper $n=4$. Når vi løste oppgaven fikk vi 3 streker, dvs. $n-1 = 3$. Slik vil det alltid være! Har vi n typer, får vi $n-1$ streker (skillelinjer).

Når vi skulle bestemme hvor mange plasser vi kunne velge mellom når strekene skulle plasseres måtte vi summere antall sedler som skulle velges med antall streker, dvs. $r + (n-1) = 5 + (4-1) = 8$. Dermed fikk vi formelen:

$$\begin{aligned} \binom{\text{Antall plasser \AA velge mellom}}{\text{Antall streker som skal plasseres}} &= \binom{\text{stjerner} + \text{streker}}{\text{streker}} \\ &= \binom{r + (n-1)}{n-1} = \binom{n+r-1}{n-1} \end{aligned}$$

Nå har vi kommet frem til noe som ligner på *formelen for uordnet utvalg med tilbakelegging*:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Bruker vi så regelen om binomialkoeffisienter $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ på formelen for uordnet utvalg med tilbakelegging får vi:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{(n+r-1)-r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

som er den formelen vi brukte i vår løsning! Dette gir oss følgende teorem:

Teorem

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

Eksempel 2

I fruktdisken i butikken er det epler, pærer og appelsiner. Vi skal kjøpe 4 frukter. På hvor mange måter kan dette gjøres?

Oppgaven kan løses på samme måte som det forrige eksempelet, men her velger vi i stedet å bruke formelen direkte:

Vi har et *uordnet 4-utvalg med tilbakelegging*¹ der $n = 3$ og $r = 4$.

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

¹ NB! «med tilbakelegging» menes det i denne forbindelse at samme type frukt kan velges flere ganger.

Vi kunne også ha brukt formelen vi utledet:

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

og ser at vi får samme resultat.

Oppsummering

Gitt n forskjellige objekter og r objekter som vi skal velge:

	<u>Uten</u> tilbakelegging	<u>Med</u> tilbakelegging
Ordnet	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Uordnet	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

Når man løser oppgaver er utfordringen å avgjøre hva som er n og hva som er r , samt vite hvilken formel man skal velge.