

Relasjoner

Utdrag fra avsnitt 9.1, 9.3, 9.4 og 9.5 i læreboka

- 9.1 - Relasjoner
- 9.3 - Operasjoner på relasjoner
- 9.4 - Utvidelser av relasjoner - tillukninger
- 9.5 - Ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser

Gitt mengdene A og B . **En relasjon er en mengde av verdipar, der første koordinaten a er fra mengden A og andrekoordinaten b er fra mengden B .** Verdiparet beskriver en forbindelse (*en relasjon*) fra a til b .

En relasjon R fra A til B (mellom A og B) er en *delmengde* av $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B \quad \text{Husk: } A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Eksempel

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{og} \quad B = \{a, b, c\}$$

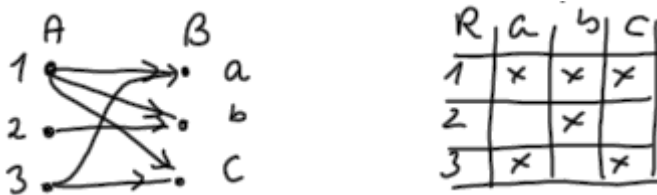
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

Relasjonen R fra A til B :

$$R = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, b), (3, a), (3, c)\}$$

$$R \subseteq A \times B$$

Dette kan illustreres enten grafisk eller med en tabell:



Hvis A og B er én og samme mengde har vi en relasjon fra A til A . Da sier vi da at *relasjonen R er på A* istedenfor fra A til A .

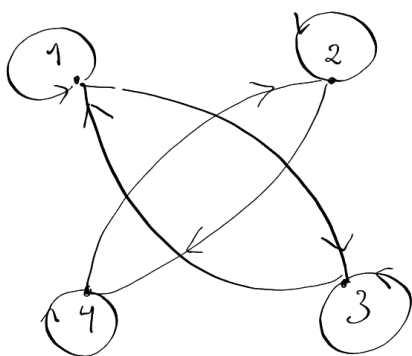
Eksempel 1

Gitt relasjonen R på A der $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(a, b) \mid a + b \text{ er et partall}\}$

$R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$

Grafen G_R til R :



Matrisen M_R til R :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det er kun disse to måtene å illustrere relasjoner på vi kommer til å bruke videre.

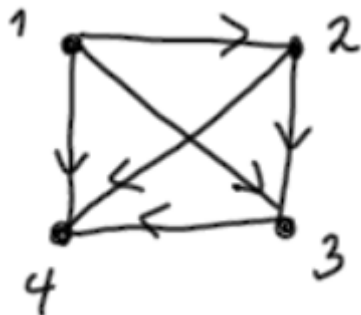
Eksempel 2

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og la R være relasjonen på A definert ved

$R = \{(a, b) \mid a < b\}$

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

Grafen G_R til R :



Matrisen M_R til R :

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenskaper til relasjoner på en mengde A.

Refleksivitet

Relasjonen R er *refleksiv* hvis $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$.

Vi kan se det ut fra:

- 1) Grafen: R er refleksiv hvis alle punktene i grafen har en sløyfe.
- 2) Matrisen: R er refleksiv hvis hoved-diagonalen kun inneholder 1'ere.

Symmetri

Relasjonen R er *symmetrisk* hvis det for alle $a, b \in A$ er slik at hvis $(a, b) \in R$, så er $(b, a) \in R$.

Vi kan se det ut fra:

- 1) Grafen: R er symmetrisk hvis der det går en pil/kant mellom to punkter også går en pil motsatt vei mellom punktene.
- 2) Matrisen: R er symmetrisk hvis M_R er en symmetrisk matrise.

Husk: En matrise M er symmetrisk hvis $M = M^T$

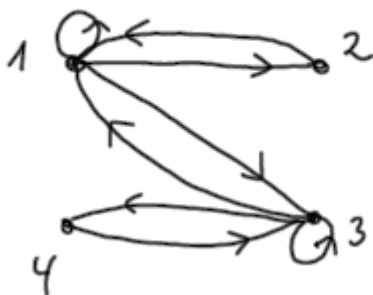
Relasjonen i Eksempel 1 på side 2 er et eksempel på en relasjon som er *både refleksiv og symmetrisk*.

Eksempel 3

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$

Grafen G_R til R:



Matrisen til R:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Avgjør om R er refleksiv:

R er ikke refleksiv fordi f.eks. $(2, 2) \notin R$.

Vi kan se det ut fra grafen fordi det ikke er en sløyfe på punktene 2 og 4. Vi kan også se det ut fra matrisen fordi det er to 0'er på hoved-diagonalen (altså ikke bare 1'ere).

Avgjør om R er symmetrisk:

R er symmetrisk fordi det for alle verdipar $(a, b) \in R$ gjelder at $(b, a) \in R$. Vi kan se det ut fra grafen fordi der det går piler mellom punkter går det piler begge veier mellom punktene.

Vi kan også se det ut fra matrisen fordi den er symmetrisk om hoved-diagonalen.

Antisymmetri

En relasjon R på en mengde A er *antisymmetrisk* hvis det for alle $a, b \in A$ er slik at hvis $(a, b) \in R$ så er $(b, a) \notin R$.

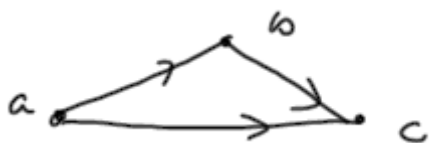
Vi kan se det ut fra:

- 1) Grafen: R er antisymmetrisk hvis alle piler/kanter i grafen går kun én vei.
- 2) Matrisen: Hvis det står 1 et sted utenfor hoved-diagonalen, må det stå 0 på motsatt side speilet om hoved-diagonalen.

Relasjonen i Eksempel 2 på side 2 er et eksempel på en relasjon som er *antisymmetrisk* (men ikke refleksiv og heller ikke symmetrisk).

Transitivitet

En relasjon R på en mengde A er *transitiv* hvis det for alle $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$, er slik at også $(a, c) \in R$. Dette kalles også for «trekantregelen».



Dette betyr at hvis det går en pil/kant fra a til b og det går en pil/kant fra b til c, så går det også en pil/kant fra a til c.

OBS!

De tre punktene a , b , og c behøver *ikke* være ulike.

Anta at vi har at $(a, b) \in R$ og $(b, a) \in R$.

Hvis R skal være transitiv har vi

$$((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R.$$

La $c = a$. Vi setter inn a for c og får:

$$((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow (a, a) \in R.$$

Altså må $(a, a) \in R$

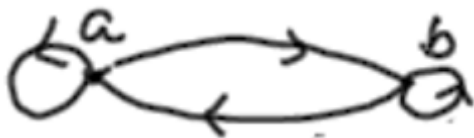
Hvis R skal være transitiv gjelder også:

$$((b, a) \in R \wedge (a, c) \in R) \rightarrow (b, c) \in R.$$

La $b = c$. Vi setter inn b for c og får:

$$((b, a) \in R \wedge (a, b) \in R) \rightarrow (b, b) \in R.$$

Altså må $(b, b) \in R$.



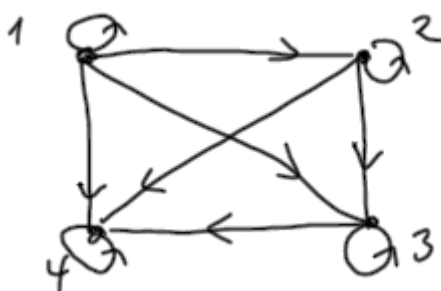
Dette betyr at hvis det går piler/kanter begge veier mellom to punkter må begge punktene ha «sløyfer» for at relasjonen skal være transitiv.

Eksempel 4

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

R kan også skrives helt ut:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. R er refleksiv
2. R er ikke symmetrisk.
3. R er antisymmetrisk
4. Hvis a, b og c er tre tall slik at $a \leq b$ og $b \leq c$, så er $a \leq c$.
R er derfor transitiv.

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon R på en mengde A er en *Ekvivalensrelasjon* hvis den er *refleksiv*, *symmetrisk* og *transitiv*.

Partielle ordninger

En relasjon R på en mengde A er en *Partiell ordning* hvis den er *refleksiv*, *antisymmetrisk* og *transitiv*.