

Primtall

Et heltall $p > 1$ kalles et primtall hvis kun 1 og p går opp i p .

Primtallsfølgen starter med

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,

Aritmetikkens fundamentalsetning

Ethvert heltall større enn 1 er enten et primtall eller kan skrives på en entydig måte som et produkt av primtall der tallene i produktet settes opp i stigende rekkefølge. Dette produktet kalles tallets primtallsfaktorisering.

Eksempler:

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^2$$

$$162 = 2 \cdot 81 = 2 \cdot 3 \cdot 27 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4$$

Hvordan avgjøre om et heltall $a > 1$ er et primtall?

Regel:

Hvis $a > 1$ **ikke** er et primtall, så må det finnes et primtall

$p \leq \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ som går opp i a . (dvs. der p er faktor i a)

Eksempel 1

Er 101 et primtall? $\lfloor \sqrt{101} \rfloor = 10$. Det holder derfor å undersøke om 2, 3, 5 eller 7 går opp i 101. Hvis ingen av dem går opp, er 101 et primtall.

Ved å undersøke litt finner vi ut at ingen av primtallene 2, 3, 5 eller 7 går opp 101. Dermed er 101 et primtall.

Eksempel 2

Er 1001 et primtall?

$\lfloor \sqrt{1001} \rfloor = 31$. Vi må maksimalt prøve om tallene 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 og 31 er faktor i 1001. Vi ser at hverken 2, 3 eller 5 går opp i 1001. Derimot

går tallet 7 går opp i 1001 siden $7 \cdot 143 = 1001$. Dermed vet vi at 1001 ikke er et primtall.

1001 kan dermed primtallfaktoriseres:

$$1001 = 7 \cdot 143 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Setning: Det finnes uendelig mange primtall

Bevis:

Anta det motsatte, dvs. at det er endelig mange primtall

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

La $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

Siden antall primtall er endelig kan ikke a være et primtall. Da må et av primtallene, p_i , gå opp i a . Dermed må også p_i gå opp i 1 siden $1 = a - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$, men dette er umulig!

Siden antagelsen vår var feil har vi vist at antall primtall må være uendelig.

[Eratosthenes sil \(eng. sieve\)](#)

Eratosthenes sil er en algoritme som ble oppfunnet av den greske matematikeren Eratosthenes som levde ca. 200 år før vår tidsregning.

Algoritmen går ut på å finne primtall ved å sette opp alle tallene etter hverandre og så fortløpende fjerne de tallene som har 2, 3, osv. som faktor.

Eksempel

Tallene fra 2 til 100

	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10
(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20
21	22	(23)	24	25	26	27	28	(29)	30
(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40
(41)	42	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50
51	52	(53)	54	55	56	57	58	(59)	60
(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80
81	82	(83)	84	85	86	87	88	(89)	90
91	92	93	94	95	96	(97)	98	99	100

Tallene som ikke er fjernet (her ringet inn) er primtall.

Metode som finner primtallene opp til en viss grense:

```
public static boolean[] finnPrimtallene( int grense )
{
    boolean[] primtall = new boolean[grense + 1];

    for( int i = 2; i < primtall.length; i++ )
        primtall[i] = true;

    // Eratostenes sil:
    for( int i = 2; i <= Math.sqrt(primtall.length); i++)
    {
        if( primtall[i] ) // true, i er et primtall
        {
            for( int j = i*i; j < primtall.length; j += i)
                primtall[j] = false;
        }
    }
    return primtall;
}
```