

Predikatlogikk

Utsagnet

$$3 > 2$$

er et utsagn fordi vi kan avgjøre sannhetsverdien av uttrykket.

$x > 2$ er et uttrykk vi ikke kan avgjøre sannhetsverdien av fordi den avhenger av verdien til x som vi ikke kjenner. Uttrykket er derfor ikke et utsagn.

Funksjonen $P(x)$: $x > 2$ kan imidlertid brukes til å lage utsagn ved å sette inn konkrete verdier for x :

$$P(3): 3 > 2$$

Da får vi et utsagn som enten er sant eller usant (her sant).

Utsagnsfunksjon:

En funksjon P , der $P(x)$ er et utsagn for hver aktuell verdi av x , kalles en utsagnsfunksjon.

Eksempel 1

La $P(x)$ være gitt ved: $x > 10$, der x er et heltall. Sannhetsverdien av $x > 10$ vil være avhengig av verdien av x . Da er $P(x)$ en utsagnsfunksjon.

Variabelen x kalles for funksjonens subjekt, og $x > 10$ kalles for funksjonens predikat.

En funksjon har en definisjonsmengde, dvs. de verdiene av x der funksjonen er definert. I dette eksempelet er definisjonsmengden alle hele tall.

Vi kan lage utsagn ved hjelp av utsagnsfunksjoner.

Hvis vi setter inn en konkret verdi for x (dvs. for subjektet) i en utsagnsfunksjon kan vi avgjøre sannhetsverdien av uttrykket og dermed har vi fått et utsagn:

$$P(2): 2 > 10 \text{ er usant.}$$

Nedenfor ser du et eksempel på en utsagnsfunksjon i Java, dvs. en boolsk metode:

```

public class Predikatlogikk
{
    public static void main(String[] a)
    {
        int n = 11;
        boolean svar = p(n);
        System.out.println( n + " > 10 = " + svar);
    }

    public static boolean p( int x )    //P(x) : (x > 10)
    {
        return x > 10;
    }
}

```

Eksempel 2

La $Q(x)$ være gitt ved « x liker diskret matematikk».

Da vil utsagnet «Lars liker diskret matematikk» kunne skrive som $Q(\text{Lars})$. Men hvordan kan vi skrive utsagnene «Alle liker diskret matematikk», «Noen liker diskret matematikk» eller «Ingen liker diskret matematikk»? For å finne ut det må vi først lære om kvantorer.

Kvantorer (eng.quantifier)

Symbolet $\forall$ kalles for «all-kvantoren» og symbolet $\exists$ kalles for «eksistens-kvantoren».

La $P(x)$ være en utsagnfunksjon. Hvis vi har bestemt definisjonsmengden for x kan vi avgjøre sannhetsverdien til uttrykkene $\forall x P(x)$ og $\exists x P(x)$.

Dvs. Hvis vi setter en kvantor ($\forall$ eller $\exists$) foran en utsagnsfunksjon får vi et kvantorutsagn.

$\forall x P(x)$ leses som «For alle x er det slik at $P(x)$ »

$\exists x P(x)$ leses som «Det eksisterer en x slik at $P(x)$ »

eller «Det finnes en x slik at $P(x)$ »

I alle tilfellene over er det underforstått at x må være i definisjonsmengden for $P(x)$.

Huskeregler:

Utsagn	Når er det sant?	Når er det usant?
$\exists x P(x)$	Hvis det finnes minst én x som gjør $P(x)$ sann.	Hvis $P(x)$ er usann for alle x , dvs. det finnes ingen x som gjør $P(x)$ sann.
$\forall x P(x)$	Hvis $P(x)$ er sann for alle x .	Hvis det finnes minst én x der $P(x)$ er usann.

Eksempel 2 fortsettelse.

$Q(x)$ er gitt ved « x liker diskret matematikk».

Ved hjelp av kvantorene kan vi lage utsagn og utrykke

«Alle liker diskret matematikk» som $\forall x Q(x)$,

«Noen liker diskret matematikk» som $\exists x Q(x)$,

«Ingen liker diskret matematikk» som $\neg \exists x Q(x)$ og

«Ikke alle liker diskret matematikk» som $\neg \forall x Q(x)$.

Negasjon av kvantorutsagn

Vi får negasjonen til et kvantorutsagn ved å sette $\neg$ (ikke) foran:

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

«Det eksisterer ikke en eneste x som gjør $P(x)$ sann.»

er det samme som

«For alle x er det slik at $P(x)$ er usann.»

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

«Det er ikke for alle x at $P(x)$ er sann.»

er det samme som

«Det eksisterer minst en x som gjør $P(x)$ usann.»

Dette er en generalisering av De Morgans lover:

Bevis:

Anta at definisjonsmengden til $P(x)$ består av de endelige mange verdiene

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Da har vi at:

$$\begin{aligned}\forall x P(x) &= P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n) \\ \exists x P(x) &= P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)\end{aligned}$$

Negerer vi disse uttrykkene og bruker de Morgans lover får vi

$$\begin{aligned}\neg \forall x P(x) &= \neg (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)) \\ &= \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \dots \vee \neg P(x_n) \\ &= \exists x \neg P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg \exists x P(x) &= \neg (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)) \\ &= \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \dots \wedge \neg P(x_n) \\ &= \forall x \neg P(x)\end{aligned}$$