

KOMBINATORIKK OG SANNSYNLIGHETSTREGNING

Opptelling - counting

Kombinatorikk og sannsynlighetsregning er en viktig del av diskret matematikk. Her studeres ulike beregnings- og telleteknikker for å beregne sannsynlighet, antall, kapasitet eller kompleksitet av ulike ting og problemer. Det kan være å undersøke om det er nok telefonnumre, nok ip-adresser, avgjøre hvor kraftig et passord er eller avgjør kompleksiteten av en algoritme. Innen risikoanalyse, f.eks. i forbindelse med Software testing, brukes teknikkene til beregning av sannsynlighet for at en uønsket hendelse skal inntreffe. Kombinatorikk brukes også innen mange andre fagfelt, som f.eks. bioteknologi, spesielt i forbindelse med sekvensering av DNA.

Produktregelen

Anta at en oppgave kan deles opp i to deloppgaver og at hver av dem kan løses uavhengig av hverandre. (Begge oppgaver må løses, og de skal løses sekvensielt, dvs. etter hverandre.)

Anta den første deloppgave kan løses på x forskjellige måter og at andre deloppgave kan løses på y forskjellige måter. Da kan hele oppgaven løses på $x \cdot y$ forskjellige måter.

Eksempel 1

Hver stol i en sal skal få et «nummer» bestående av en bokstav og et tall fra 1 til 10.

På hvor mange måter kan en stol nummereres?

Svar: $29 \cdot 10 = 290$ siden det er 29 bokstaver i alfabetet og 10 mulige tall.

En utvidelse av produktregelen

Anta at en oppgave kan deles opp i k deloppgaver og at de kan løses uavhengig av hverandre. (Alle oppgaver må løses, og de skal løses sekvensielt, dvs. etter hverandre.)

Deloppgave 1 kan løses på n_1 måter, deloppgave 2 på n_2 måter, deloppgave 3 på n_3 , osv. til deloppgave k som kan løses på n_k forskjellige måter.

Da kan hele oppgaven løses på

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ forskjellige måter.

Eksempel 2

Anta at et kjennetegn for en bil skal ha 2 bokstaver og 5 siffer. Det første av de 5 sifrene kan ikke være 0. Hvor mange mulige kjennetegn er det?

Svar: På de to første plassene er det 29 muligheter (hvis æ, ø og å brukes), på den neste plasser er det 9 muligheter (fordi vi ikke kan velge 0) og på de fire siste plassene er det 10 muligheter.

Dermed blir det:

$$29 \cdot 29 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 \cdot 29^2$$

Eksempel 3

En bit-sekvens er en rekkefølge av bit'ene 0 og 1. Lengde på sekvensen er lik antall bit.

Hvor mange forskjellige bit-sekvenser med lengde 8 finnes det?

Svar: På hver av de 8 plassene i sekvensen er det to muligheter, 0 eller 1.

Dermed blir det:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

Generelt

Vi har 2^n forskjellige bit-sekvenser med lengde n

Eksempel 4

I en flervalgsprøve er det 10 spørsmål og hvert spørsmål har 3 svaralternativer, der ett av dem er riktig og de to andre er feil.

- Hvor mange måter kan vi svare på?

$$3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{10}$$

- Hvor mange måter kan vi svare på uten å svare rett på noen av spørsmålene? $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10}$

- Sannsynligheten for ingen rette svar blir

$$\frac{2^{10}}{3^{10}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0.017, \text{ dvs. } 1,7\%$$

Sumregelen

Anta at en oppgave kan løses ved hjelp av kun en av to teknikker. Oppgaven kan løses på x måter ved hjelp av første teknikk og y måter ved hjelp av andre teknikk.

Da kan oppgaven løses på $x + y$ måter.

Dette svarer til følgende regel i mengdelære:

La A og B være to mengder der $A \cap B = \emptyset$. Da er $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Eksempel 1

Tenk deg at du skal reise fra Oslo til Bergen med enten tog eller fly på en gitt dato. Med tog har du 3 forskjellige avganger å velge mellom og med fly har du 5 forskjellige ruter å velge mellom. Hvor mange reisevalg du for reisen fra Oslo til Bergen?

Svar: $3 + 5 = 8$.

Eksempel 2

Det skal velge en felles studentrepresentant for to klasser. I den ene er det 20 studenter og i den andre er det 30 studenter. Hvor mange muligheter er det?

Svar: $20 + 30 = 50$

Utvidelse av sumregelen.

Anta at en oppgave kan løses ved hjelp av kun en av k ulike teknikker. Disse k teknikkene har henholdsvis $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ løsningsmåter. Da kan oppgaven løses på $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ måter.

Eksempel 2

Hvor mange ikke-tomme bit-sekvenser med lengde 8 eller mindre finnes det? Vi viste i et tidligere eksempel at det finnes $2^8 = 256$ forskjellige bit-sekvenser med lengde 8. Her må vi også ta med alle de som har mindre enn 8 bit's lengde, dvs. alle med lengde 7, alle med lengde 6, alle med lengde 5, osv. t.o.m. alle med lengde 1. Da får vi

$$\begin{aligned}
 & 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 \\
 &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 \\
 &= 2 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^7 \\
 &= \sum_{j=0}^7 2 \cdot 2^j = 2 \frac{(2^{7+1} - 1)}{2 - 1} = 2(2^8 - 1) = 2^9 - 2 = \underline{\underline{510}}
 \end{aligned}$$

Generelt:

Det finnes det $2^{n+1} - 2$ forskjellige ikke-tomme bit-sekvenser med lengde n eller mindre.

Subtraksjonsregelen

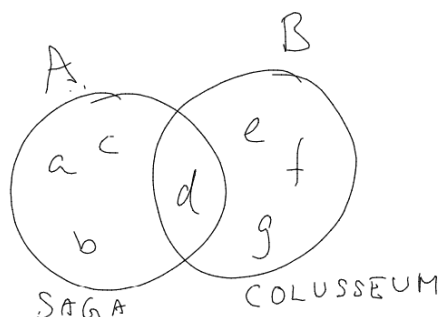
Anta at en oppgave kan løses på x måter ved hjelp av en teknikk og y måter ved hjelp av en annen teknikk. Da kan oppgaven løses på $x + y$ måter minus det antallet måter som er felles for de to teknikkene.

Dette svarer til følgende regel i mengdelære:

La A og B være to mengder. Da er $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Eksempel 1

Hvor mange forskjellige filmer kan jeg velge mellom hvis jeg skal på kino på Saga eller Colosseum? På Saga går filmene a, b, c og d, og på Colosseum går filmene d, e, f og g.



La mengden A inneholde filmene som går på Saga og mengden B inneholde filmene som går på Colosseum. Antall filmer vi kan velge mellom blir:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 4 - 1 = 7.$$

Eksempel 2

Hvor mange bit-sekvenser med lengde 8 har 1 som første bit eller 00 som de to siste bit'ene? Eksempel på bit sekvenser: 10110110, 01111100, 10110100

Antall som starter med 1: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

Antall som slutter med 00: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2^6$

Antall som starter med 1 og slutter med 00: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2^5$

Svaret blir: $2^7 + 2^6 - 2^5 = \underline{\underline{160}}$

Divisjonsregelen

Anta at en oppgave kan løses på n måter og at de n måtene kan deles opp i grupper av d like måter i hver gruppe. Da kan oppgaven løses på $n \text{ div } d$ måter.

En enkel anvendelse.

La n og k være positive tall. Hvor mange tall opp til og med n er delelig med k (dvs. har k som faktor)?

Svar: Det er $n \text{ div } k$ forskjellige tall fra 1 til n som er delelig med k .

Husk: $n \text{ div } k$ er kvotienten i heltallsdivisjon og at $n \text{ div } k = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Eksempel

Hvor mange av tallene fra 1 til 100 er delelig med 3 eller 4?

- Delelig med 3: $100 \text{ div } 3 = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$

- Delelig med 4: $100 \text{ div } 4 = 25$
- Delelig med både 3 og 4, dvs. delelig med $\text{lcm}(3, 4) = 12$:

$$100 \text{ div } 12 = \left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$$

Svar: $33 + 25 - 8 = 50$

Generell regel

Antallet tall fra 1 til n som er delelig med k_1 eller k_2 er gitt ved:

$$(n \text{ div } k_1) + (n \text{ div } k_2) - (n \text{ div } \text{lcm}(k_1, k_2))$$

Divisjonsregelen for mengder

La mengden A være en union av mengdene $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$, dvs.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k.$$

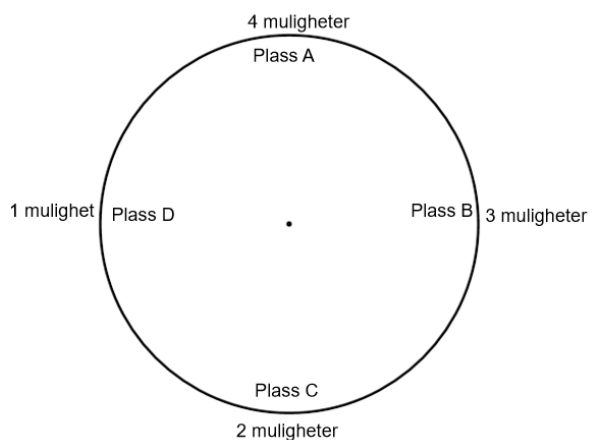
Anta at mengdene er parvis disjunkte, dvs. ingen av dem har felles elementer.

Anta også at alle har samme antall elementer, dvs. $|A_i| = d$ for alle i .

Da er $|A| = k \cdot d$ og $k = |A|/d$ og $d = |A|/k$

Eksempel

Fire personer p_1, p_2, p_3 og p_4 skal plasseres rundt et sirkulært bord på plassene a, b, c og d. Hvor mange muligheter er det?

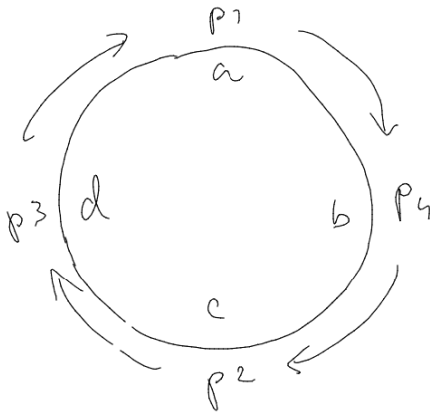


Vi kan tenke oss at vi begynner å velge personen som skal sitte på plass A. Her har vi 4 muligheter. Deretter velger vi den som skal sitte på plass B. Nå er det

bare 3 personer å velge mellom siden en allerede er plassert på plass A. Når vi skal velge personen som skal sitte på plass C har vi 2 muligheter, mens når vi kommer til plass D er det kun en person igjen og dermed bare 1 mulighet.

Vi får da $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ mulige plasseringer rundt bordet.

La oss nå anse to plasseringer som like hvis alle personene rundt bordet har de samme personene på hver side, uavhengig av hvilken plass de sitter på. Hvor mange mulige plasseringer får vi da?



Hvis alle personene som sitter ved bordet samtidig flytter en plass med klokka, vil alle sitte på en ny plass, men bordplasseringen skal likevel anses som den samme som den foregående, siden alle fremdeles har de samme personene på hver side. Dette betyr at 4 og 4 plasseringer skal anses som like. Antall mulige bordplasseringer blir følgelig redusert til $24/4 = 6$.

(I dette eksempelet er $|A| = 24$, $d = 4$ og $k = 6$, jfr. divisjonsregelen.)

Eksempel der flere regler brukes

Et passord skal ha 6 eller 7 tegn og hvert tegn være en stor bokstav eller et siffer. Passordet må inneholde minst en bokstav. Hvor mange slike passord finnes?

Kombinasjoner med 6 tegn:

- 39^6 muligheter med bokstaver og siffer
- 10^6 muligheter med kun siffer
- $39^6 - 10^6$ muligheter med minst en bokstav.

Kombinasjoner med 7 tegn:

- 39^7 muligheter med bokstaver og siffer
- 10^7 muligheter med kun siffer
- $39^7 - 10^7$ muligheter med minst en bokstav.

Svar: Det finnes $39^7 - 10^7 + 39^6 - 10^6 = 140738750440$ mulige passord som tilfredsstiller kravene som er beskrevet over.