

Mengder

En **mengde** (eng: set) er en *uordnet samling av objekter*. Vi bruker vanligvis store bokstaver, A, B, C, osv., til å betegne mengder.

Objektene som inngår i mengden kalles for *elementer* i mengden (eller medlemmer) og betegner med små bokstaver, a, b, c, osv.

Hvis er A en mengde og a et element i mengden A skriver vi:
 $a \in A$ (leses «a er element i A»)

Hvis a ikke er et element i mengden A skriver vi:
 $a \notin A$ (leses «a er ikke element i A»)

Vi *definerer* en mengde ved å fortelle hva den inneholder.

Vi kan definere den på listeform eller ved hjelp av en utsagnsfunksjon.

Mengder definert på listeform

La A være mengden av de hele tallene fra 1 til 5.

Vi skriver da $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

Hvis mengden har mange elementer, pleier vi kun å ramse opp noen i starten og noen i slutten. Vi tar med så mange som er nødvendig for at vi skal se et mønster.

La B være mengde av heltallene fra 1 til 100. Det kan vi skrive mengden på listeform slik:

$B = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ Prikkene representerer elementene som mangler.

La C være mengde av alle partall fra 2 til 100.

$C = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$

La D være alle positive heltall. Da har vi en uendelig mengde:

$D = \{1, 2, 3, \dots\}$

Mengder definert ved hjelp av en utsagnsfunksjon.

En mengde kan også defineres ved hjelp av en utsagnsfunksjon med en gitt definisjonsmengde (eng: domain):

Eksempel

La $P(x)$ være gitt ved: $x > 10$, der x er et heltall. Det betyr at definisjonsmengden A for $P(x)$ er alle heltallene. Mengden B kan defineres som

$$B = \{x \in A \mid P(x)\} = \{x \in A \mid x > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$$

Kan leses som: « B er mengden av de x tilhørende A slik at $x > 10$.»

Symbolet $\{ \dots \mid \dots \}$ kalles *mengdebygger* (eng: set builder)

Den vertikale streken $\mid$ leses som «*slik at*».

Definisjon

La A være definisjonsmengden til utsagnsfunksjonen $P(x)$.

Da kan vi definere en ny mengde B som

$$B = \{a \in A \mid P(a)\}$$

Dette betyr at B er mengden av de elementene i A som gjør $P(a)$ sann.

Kjente mengder

Noen tallmengder har fått egne symboler:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dvs. de naturlige tallene.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dvs. de hele tallene.

$\mathbb{Q}$ er mengden av de rasjonale tallene.

$\mathbb{R}$ er mengden av de reelle tallene.

Programmering

En datatype (*int*, *double*, ...) kan også sees på som en mengde. Datatypen *int* er mengden av alle heltall fra -2^{31} til $2^{31}-1$.

Likhet mellom mengder

Hvis to mengder, A og B , er like, inneholder de de samme elementene.

Vi skriver da at $A = B$.

Hvis A og B ikke inneholder de samme elementene er de heller ikke like.

Vi skriver da at $A \neq B$.

Eksempel 1

La $A = \{1, 7, 3, 5\}$ og $B = \{7, 5, 3, 1\}$.

Er $A = B$? Ja, fordi A og B inneholder de samme elementene.

NB! Rekkefølgen elementene står i spiller ingen rolle.

Eksempel 2

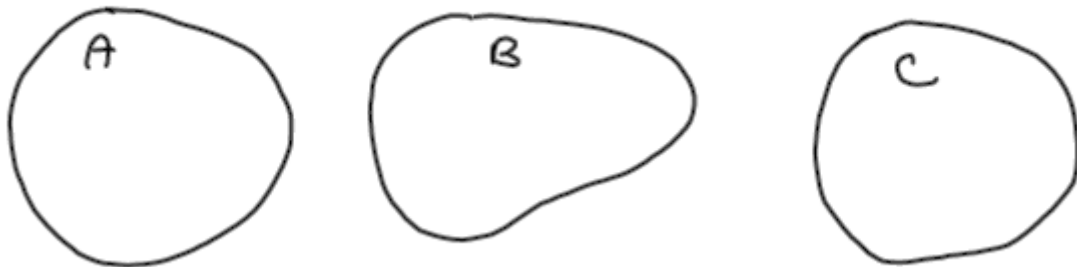
La $A = \{1, 1, 2, 2, 3\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$.

Er $A = B$? Ja, fordi både A og B inneholder elementene 1, 2 og 3.

NB! En mengde blir ikke større om et element tas med flere ganger!

Venn-diagram

En mengde kan tegnes som en runding («rund» figur). Det som er innenfor rundingen er med i mengden.



Delmengde (eng: subset)

En mengde A er en *delmengde* av en mengde B hvis *alle elementene i A også er elementer i B*. Vi skriver at $A \subseteq B$ som kan leses «A er en delmengde av B».

Hvis A ikke er en delmengde av B skriver vi $A \not\subseteq B$.

Eksempel 1

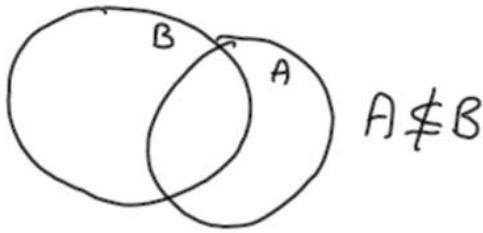
La $A = \{2, 3, 5\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Her er $A \subseteq B$.

Eksempel 2

La $A = \{2, 3, 5, 6\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Her er $A \not\subseteq B$ fordi $6 \in A$, men $6 \notin B$.

Delmengde begrepet kan defineres mer formelt:

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

som kan leses:

«For alle x er det slik at hvis x er element i A så er x også element i B ».

Symbolet $\subseteq$ kalles for *inkluderings*symbolet.

NB! En mengde er alltid en delmengde av seg selv:

$A \subseteq A$ for alle mengder A .

Det er flere måter å si at A er en delmengde av B :

- A er inneholdt i B
- A er inkludert i B
- B omfatter A

NB! Vi har at $A = B$ hvis og bare hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

$$(A = B) \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Ekte delmengde

Hvis $A \subseteq B$ og er $A \neq B$, så sier vi at A er en *ekte delmengde* av B og skriver det som $A \subset B$.

Observasjon

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Den tomme mengde, $\emptyset$

En mengde som ikke inneholder noen elementer kalles *den tomme mengden*. Den betegnes som $\{\}$ eller bokstaven $\emptyset$.

Den tomme mengden er delmengde av alle andre mengder:

$\emptyset \subseteq A$ for alle mengder A .

Eksempel

NB! En mengde kan være element i en annen mengde.

La A være gitt ved:

$A = \{1, 2, \emptyset, \{1\}, 2, 2\}$

Elementene i mengden er *både tall og mengder*. Både 1 og $\{1\}$ er elementer i A :

$1 \in A$ og $\{1\} \in A$.

Den tomme mengde $\emptyset$ er *både et element i A og en delmengde av A* :

$\emptyset \in A$ og $\emptyset \subseteq A$.

Hva er forskjellen mellom 1, $\{1\}$ og $\{\{1\}\}$?

Først har vi *tallet 1*, så har vi *mengden av tallet 1* og så har vi *mengden av mengden av tallet 1*. Vi har:

$1 \in \{1\}$

$1 \notin \{\{1\}\}$

$\{1\} \in \{\{1\}\}$

En mengdes kardinalitet. (eng: cardinality)

En mengdes *kardinalitet* er *antallet forskjellige elementer i mengden*.

Kardinaliteten til A betegnes med $|A|$.

Eksempler

$A = \{a, b, c, d\}$

$|A| = 4$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$|B| = 6$

$C = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$

$|C| = 3$

$D = \{2, 4, 6, 8, \dots, 98, 100\}$

$|D| = 50$

$E = \emptyset$

$|\emptyset| = 0$

$F = \{a, \{a\}, \{a, b\}\}$

$|F| = 3$

NB! $b \notin F$

$G =$ mengden av bokstaver i alfabetet

$|G| = 29$

Potensmengder

La A være en mengde. *Potensmengden* til A betegnes med $P(A)$ og er den mengden som har alle delmengder av A som elementer.

Eksempler

$$A = \{a, b\}, \quad P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$$

$$B = \{1, 2, 3\} \quad P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$|P(B)| = 2^{|B|} = 2^3 = 8$$

Formel: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Kartesisk produkt: (eng. Cartesian product)

La A og B være mengder. Det kartesiske produktet av A og B betegnes med

$$A \times B$$

(leses som A kryss B) og er definert ved mengden av alle par (a, b) der førstekoordinaten tilhører A og andrekoordinaten tilhører B :

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ og } b \in B\}$$

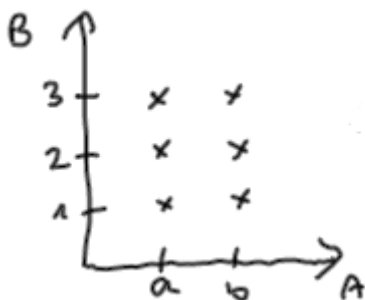
$$\text{Vi har at } |A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Eksempel

$$\text{La } A = \{a, b\} \text{ og } B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

Vi kan tegne $A \times B$ i et koordinatsystem:



De seks kryssene utgjør mengden $A \times B$.

$$|A| = 2 \text{ og } |B| = 3.$$

$$\text{Vi ser at } |A \times B| = 6 = 2 \cdot 3 = |A| \cdot |B|.$$