

Mengdeoperasjoner

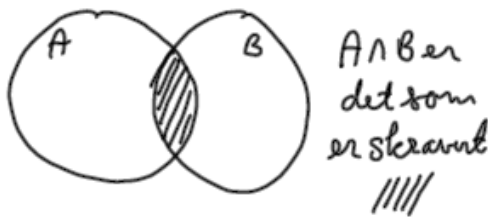
Tema for forelesningen:

- Snittet av to mengder
- Disjunkte mengder
- Union av to mengder
- Eksklusiv union (symmetrisk differens) av to mengder
- Differensen mellom to mengder
- Universal-mengde
- Komplementet til en mengde

Snittet av to mengder (eng. intersection)

Snittet av to mengder A og B betegnes med $A \cap B$ (leses som « A snitt B ») og er *mengden av de elementene som både er i A og i B .* (dvs. de elementene som A og B har felles.)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

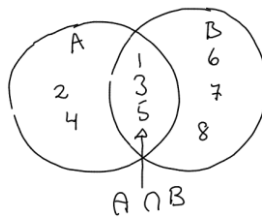


Eksempel:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$



Observasjon: $A \cap B = B \cap A$, dvs. $\cap$ er en kommutativ operator.

Disjunkte mengder (eng. disjoint)

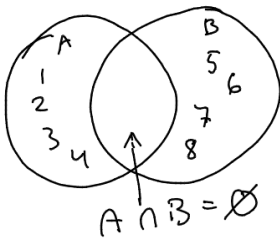
To mengder A og B er *disjunkte* hvis $A \cap B = \emptyset$,

Det betyr at snittet er tomt og at A og B har ingen felles elementer.

Eksempel

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$$

$A \cap B = \emptyset$. Følgelig er A og B disjunkte mengder.



Unionen av to mengder (eng union)

Unionen av to mengder A og B betegnes med $A \cup B$ (leses som «A union B») og er mengden av de elementene som er i A eller i B (eller i begge deler).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

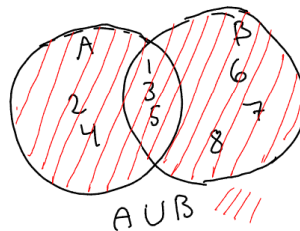


Eksempel:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$$

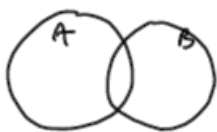
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



Observasjon: $A \cup B = B \cup A$, dvs. $\cup$ er en kommutativ operator.

Antallet elementer i en union

NB! $|A|$ betyr kardinaliteten til mengden A, dvs. antallet ulike elementer i A.

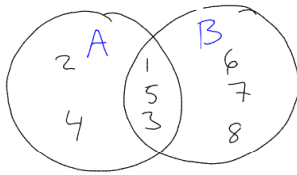


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Eksempel

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



$$|A| = 5, |B| = 6, |A \cap B| = 3, |A \cup B| = 8$$

$$\text{Vi ser at } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 6 - 3 = 8$$

Hvis vi ikke hadde trukket fra de tre elementene i snittet ville de ha blitt tatt med to ganger, fordi de *både* er med i $|A|$ og i $|B|$ og det blir *en gang for mye*. Derfor må vi trekke fra snittet slik at det bare er tatt med en gang.

Eksklusiv union (kalles også for symmetrisk differens)

Den eksklusive unionen av to mengder A og B betegnes som

$A \oplus B$ (leses som «A eksklusiv union B») og er mengden av de elementene som enten er i A eller i B, men ikke i begge:

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$$

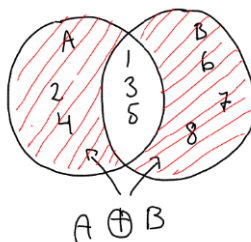


Eksempel:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$$

$$A \oplus B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$$

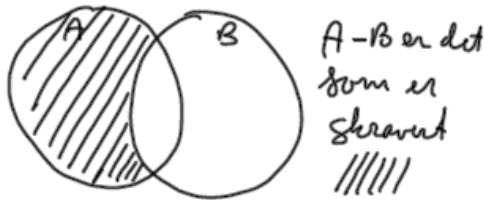


Observasjon: $A \oplus B = B \oplus A$, dvs. $\oplus$ er en kommutativ operator.

Differensen mellom to mengder (eng: difference)

Differensen mellom to mengder A og B betegnes som $A - B$ (leses som «A minus B») og er *mengden av de elementene som er i A, men som ikke er i B*:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

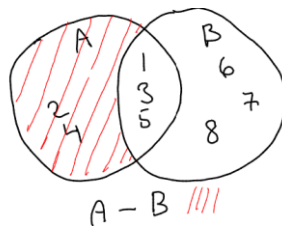


Eksempel:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$$

$$A - B = \{2, 4\}$$



Observasjon 1: $A - B = A - (A \cap B)$

Observasjon 2: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ og kalles derfor også *symmetrisk differens*.

Observasjon 3: $A - B \neq B - A$, dvs. $-$ er **ikke** en kommutativ operator.

Formler for antallet elementer i mengder:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$\begin{aligned} |A \oplus B| &= |A - B| + |B - A| = |A| - |A \cap B| + |B| - |B \cap A| = \\ &= |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B| \end{aligned}$$

Universal mengde

Mengdene våre er normalt delmengde av en større mengde. Denne kaller vi for *universalmengden*. Vi bruker ofte bokstaven U for den.

Eksempel 1

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{7, 1, 3, 8, 5, 6\}$$

Her er det naturlig å se på mengden av *de hele tallene* ($\mathbb{Z}$) som universalmengden.

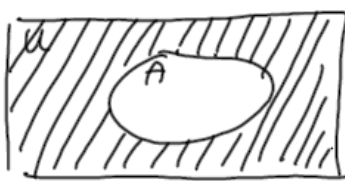
Eksempel 2

$$A = \{a, b, c\}$$

Her er elementene bokstaver og den naturlige universalmengden blir *alfabetet*.

Komplementet til en mengde

La A være en delmengde av universalmengden U . *Komplementet til A* (med hensyn på U) betegnes som $\bar{A}$ (leses som « A kompliment» eller «*komplimentet til A* ») og er mengden av de elementene i U som ikke er i A , dvs. $U - A$.



$\bar{A}$ er del som
er skravert /////

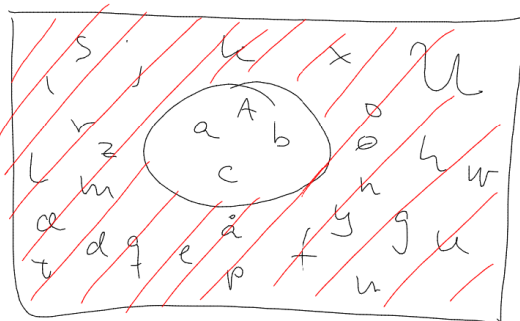
$$\text{OBS: } |\bar{A}| = |U| - |A|$$

Eksempel

$$A = \{a, b, c\}$$

Hvis universalmengden U er alfabetet blir komplementet til A

$$\bar{A} = \{d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \text{æ}, \text{ø}, \text{å}\}$$



Observasjon

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Et praktisk eksempel

I en klasse med 30 studenter er det 14 som har bil, 7 som har motorsykkel og 2 som har begge deler.

Spørsmål:

- 1) Hvor mange har kun bil?
- 2) Hvor mange har ingen av delene?

Løsning:

La B være mengden av de som har bil, og la M være mengden av de som har motorsykkel. Da blir $B \cap M$ mengden av de studenter som har både bil og motorsykkel. Vi får $|U| = 30$, $|B| = 14$, $|M| = 7$ og $|B \cap M| = 2$.

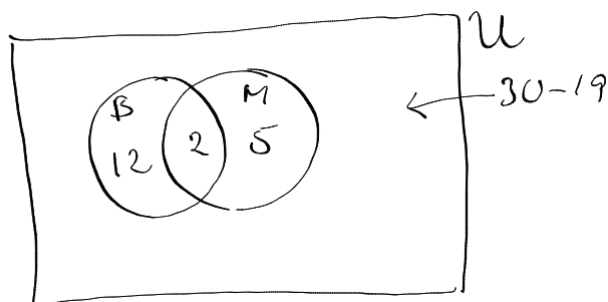
- 1) Hvor mange har kun bil?

Finner $|B - M|$, dvs. antallet studenter som har bil men ikke motorsykkel.

- 2) Hvor mange har ingen av delene?

Finner $|\overline{B \cup M}|$, dvs. antallet studenter som hverken har bil eller motorsykkel.

a) Løsning ved hjelp av venndiagram:

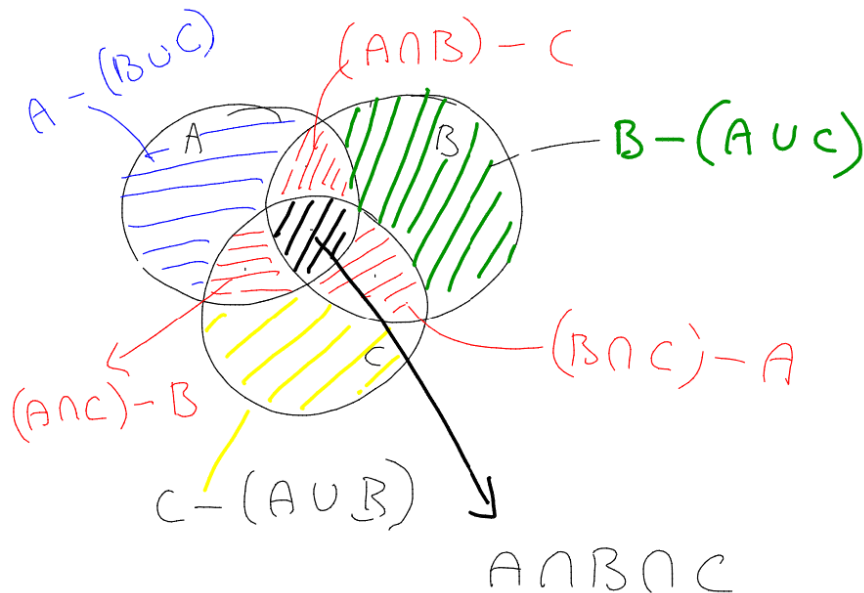


b) Løsning ved hjelp av formler:

$$\begin{aligned}
 1) \quad |B - M| &= |B| - |B \cap M| = 14 - 2 \\
 2) \quad |\overline{B \cup M}| &= |U| - |B \cup M| = \\
 &= |U| - (|B| + |M| - |B \cap M|) = \\
 &= 30 - (14 + 7 - 2) = 30 - 19 = 11
 \end{aligned}$$

Tre mengder

Vennndiagram for tre mengder A, B og C må tegnes slik at alle muligheter blir dekket. For å få dette til må de overlappe hverandre:

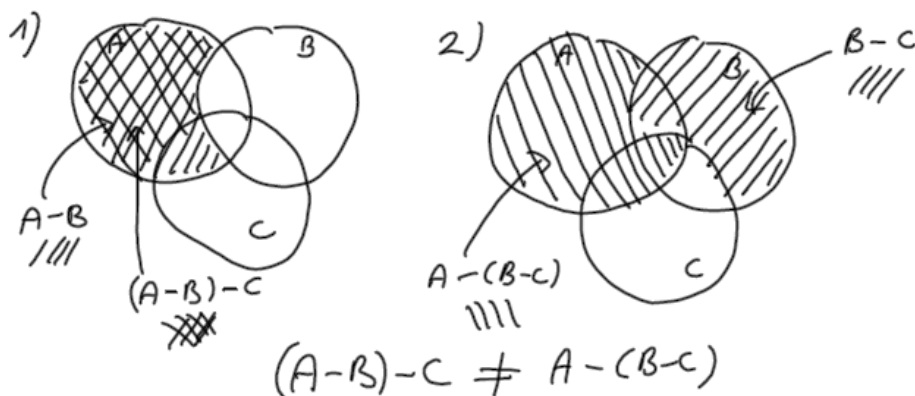


Oppgave

Avgjør om følgende to mengder er like:

1) $(A - B) - C$

2) $A - (B - C)$



Antallet elementer i $A \cup B \cup C$

$$|A \cup B \cup C| =$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Hvorfor er denne formelen riktig?

I summen $|A| + |B| + |C|$ har vi tatt med $|A \cap B \cap C|$ tre ganger, til tross for at vi bare skal ha det med en gang.

$|A \cap B \cap C|$ er delmengde av både $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ og $|B \cap C|$. Når vi trekker fra disse snittene blir $|A \cap B \cap C|$ trukket fra tre ganger, altså en gang for mye. Derfor må vi legge til snittet til slutt.

Mengde-identiteter

I forbindelse med utsagnslogikk gjennom gikk vi flere lover som gjaldt for utsagn, deriblant

- De kommutative lovene
- De assosiative lovene
- De distributive lovene
- De Morgans lover

Også for mengder har vi tilsvarende lover. De viktigste er

Komplementasjonsloven

$$\overline{\overline{A}} = A$$

De kommutative lovene

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

De assosiative lovene

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

De distributive lovene

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgans lover

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

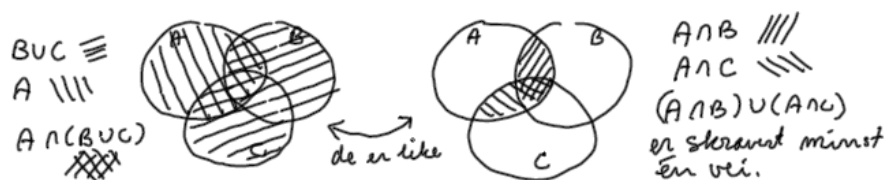
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Lovene kan vises ved hjelp av venndiagram.

Eksempel 1

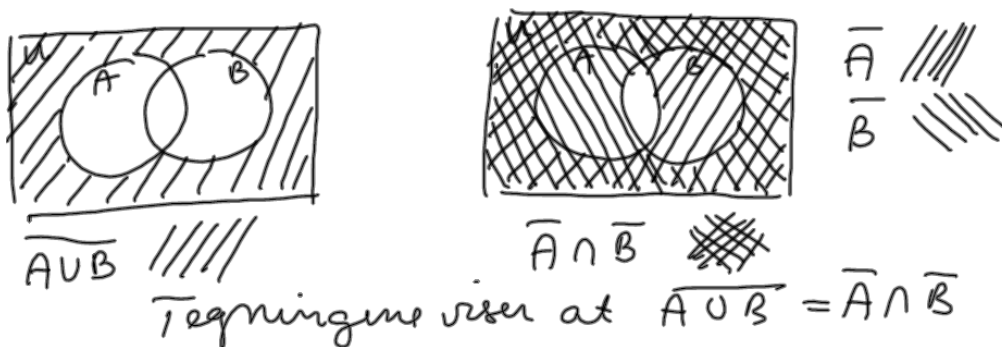
Viser den distributive loven

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Eksempel 2

Viser De Morgans lov

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



Vi kan også bruke medlemskapstabell (eng. membership table) til å bevise at

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

↔ like

Konklusjon:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Tallet 1 betyr at elementet er med i mengden.

Det finnes enda flere mengde-identiteter. Tabellen nedenfor er hentet fra læreboka og den viser de viktigste:

TABLE 1 Set Identities.	
<i>Identity</i>	<i>Name</i>
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{\overline{A}} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

Mange mengder

Har vi mange mengder er det vanlig å indeksere dem. Anta at vi har n mengder. Da skriver vi:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$$

Vi setter opp snitt og union slik:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$
