Induksjonsbevis

<u>Problem</u>

Vi skal bevise at summen av de n første oddetallene er lik n^2, dvs. at

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 2n-1 = n^2$

Induksjonsbevis handler om å vise at en påstand P(n) er sann for alle $n \geq 1$.

Beviset består at to trinn:

Basistrinnet: Vi må vise at P(1) er sann.

*Induksjonstrinne*t:

1. Vi antar at P(k) for et vilkårlig tall $k \geq 1$
2. Vi viser at hvis P(k) er sann, så må P(k+1) være sann, dvs. $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Hvis basistrinnet og induksjonstrinnet er oppfylt, sier induksjonsprinsippet viser at P(n) er sann for alle $n \geq 1$.

<u>Eksempel</u>

La P(n) være påstanden om at

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = n^2$

Basistrinnet:

P(1): $2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ er sant

Induksjonstrinnet:

a) Antar at P(k) er sann, dvs.
$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2k-1) = k^2$
b) Vi bruker så antagelsen til å vise at P(k + 1) er sann.
$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2k-1) + (2(k+1)-1) =$
$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2k-1) + (2k+2-1) =$
$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 2k-1}_{k^2 \text{ - antagelsen}} + 2k+1 = k^2 + 2k + 1^2$

I følge 1. kvadratsetning er $k^2 + 2k + 1$ lik $(k+1)^2$
Dermed har vi vist at hvis P(k) er sann, så er også P(k+1) sann.

<u>Konklusjon</u>: Induksjonsprinsippet gir at P(n) er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 2

La P(n) være påstanden at

6 går opp i $(n^3 – n)$ for alle $n \geq 1$.

Kan dette stemme?

P(1): $n^3 – n = 1^3 – 1 = 0$	6 går opp i 0 er sant.
P(2): $n^3 – n = 2^3 – 2 = 6$	6 går opp i 6 er sant.
P(3): $n^3 – n = 3^3 – 3 = 24$	6 går opp i 24 er sant.
P(4): $n^3 – n = 4^3 – 4 = 60$	6 går opp i 60 er sant.

Induksjonsbevis

Basistrinnet:

P(1): $n^3 – n = 1^3 – 1 = 0$ 6 går opp i 0 er sant.

Induksjonstrinnet:

a) Antar at P(k) er sann, dvs. at

6 går opp i $(k^3 – k)$ for alle $k \geq 1$.

b) Vi må bruke antagelsen til å vise at P(k+1) er sann, dvs. at
6 går opp i $((k+1)^3 – (k+1))$.

$$(k+1)^3 – (k+1)$$

$$= (k+1)^2(k + 1) – (k + 1)$$

$$= (k^2 + 2k + 1)(k+1) – (k + 1)$$

$$= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 – k – 1$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 – k – 1$$

$$= k^3 – k + 3k^2 + 3k$$

$$= k^3 - k + 3(k^2 + k) = \underbrace{(k^3 – k)}_{\text{antagelsen}} + 3k(k + 1)$$

Vi har at k og k+1 er nabotall og da må det ene av dem være partall siden partall og oddetall kommer annenhver gang i tallrekken. Dermed går 2 opp i k(k+1). Siden vi fra før har 3 som faktor går $2·3 = 6$ opp i 3k(k+1).

Vi har funnet at 6 går opp i $(k^3 - k) + 3k(k+1)$ og siden det er samme som $(k+1)^3 - (k+1)$ går 6 opp der. Følgelig har vi vist at
hvis P(k) gjelder så gjelder også P(k+1).

Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at P(n) er sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel 3

La P(n) være påstanden at

3 går opp i $(5^n - 2^n)$ for alle $n \geq 1$.

Kan dette stemme?

P(1): $5^1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$	3 går opp i 3 er sant.
P(2): $5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$	3 går opp i 21 er sant.
P(3): $5^3 - 2^3 = 125 - 8 = 117$	3 går opp i 117 er sant.

Induksjonsbevis

Basistrinnet:

P(1): $5^1 - 2^1 = 5 - 2 = 3$ 3 går opp i 3 er sant.

Induksjonstrinnet:

a) Antar at P(k) er sann, dvs. at
 3 går opp i $(5^k - 2^k)$ for alle $k \geq 1$.
b) Vi må bruke antagelsen til å vise at P(k+1) er sann, dvs. at 3 går opp i $(5^{k+1} - 2^{k+1})$.

$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k =$$

$$3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^k + 2(5^k - 2^k)$$

$$\underbrace{3 \cdot 5^k}_{\text{3 er faktor}} + 2\underbrace{(5^k - 2^k)}_{\text{antagelsen}}$$

Vi ser at 3 går opp i $3 \cdot 5^k$ fordi 3 her er faktor og at 3 går opp i $2(5^k - 2^k)$ fordi dette er gitt i antagelsen. Følgelig har vi vist at hvis P(k) gjelder så gjelder også P(k+1).

Konklusjon: Induksjonsprinsippet gir at P(n) er sann for alle $n \geq 1$.