

Differensligninger

I kapittel 2 lærte vi om følger og rekker. Vi studerte både aritmetiske og geometriske følger og rekker. Noen følger og rekker er imidlertid verken aritmetiske eller geometriske, men de følger likevel et mønster. I dette kapittelet skal vi se hvordan vi kan finne formler for tallfølger ved hjelp av *differensligninger*, også kalt *rekursjonsligninger* eller *rekursjonsrelasjoner*. (eng. *recurrence relation*)

En differensligning er en rekursiv definisjon av en tallfølge.

Gitt tallfølgen:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Hvis a_n er definert ved hjelp av *en eller flere* av de foregående leddene i følgen, er følgen definert *rekursivt*.

Det er en *rekursiv* definisjon fordi a *forekommer på begge sider av likhetstegnet*, men med lavere indeks(er) på den ene siden.

Eks: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2, \text{ der } a_0 = 0, a_1 = 1$

Vi kan finne ledd a_n ved å bruke de to foregående leddene a_{n-1} og a_{n-2} , men hvis vi ikke kjenner dem, må vi starte med de to første, a_0 og a_1 , og så nøste oss fremover til a_n . Hvis indeksen n er stor kan dette bli tungvint og lite effektivt.

En differensligning har en tallfølge som løsning.

Løsningen gir oss *en formel for å bestemme det n 'te leddet i tallfølgen uten å kjenne de foregående leddene i følgen.*

Eksempelet over var en *rekursiv definisjon* av **Fibonaccitallene**, dvs. definert ved hjelp av differensligningen:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{der } a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ og } n \geq 2$$

Ved å *løse* denne differensligningen, vil vi kunne finne en formel som gir oss a_n *uten* å kjenne de to foregående leddene i følgen.

Det viser seg at formelen for å bestemme det n 'te leddet er

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Før vi viser hvordan vi kom frem til denne formelen, skal vi se litt nærmere på denne tallfølgen:

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ kalles ligningens *startbetingelser*. Når de er gitt kan vi regne ut så mange ledd vi vil:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$$

osv.

Fibonacci-tallene: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

Generelt kan en **lineær differensligning av k 'te orden** beskrives slik:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3} + \dots + c_k \cdot a_{n-k}$$

der a_{n-1} , a_{n-2} , a_{n-3} , ..., a_{n-k} er de foregående leddene i tallfølgen, og c_1 , c_2 , c_3 , ..., c_k er reelle tall (koeffisienter) der $c_k \neq 0$.

Siden differensligningen som beskriver Fibonacci-tallene baserer seg på *de to foregående tallene* i følgen må den være av 2. orden der $c_1 = 1$ og $c_2 = 1$.

I vårt pensum vil k maksimalt være lik 2, noe som gir oss to typer differensligninger, dvs. differensligninger av 1. og 2. orden.

1. ordens differensligning

$$a_n = c \cdot a_{n-1} + d,$$

der c og d er konstanter.

Vi ser her at neste ledd i tallfølgen dannes på grunnlag av det foregående leddet. Hanois tårn, der $H_n = 2H_{n-1} + 1$ er det minste antall trekk som trengs for å flytte n brikker, er et eksempel på en differensligning av 1. orden. Den skal vi løse senere. Se for øvrig:

<http://www.dynamicdrive.com/dynamicindex12/towerhanoi.htm>

2. ordens differensligning

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2},$$

der c_1 og c_2 er konstanter.

Vi ser her at neste ledd i følgen dannes på grunnlag av de to foregående leddene. Dermed vil en slik følge kreve to startebetingelser. Differensligningen for Fibonacci-tallene er et eksempel på en differensligning av 2. orden. Vi skal løse den senere.

Løsning av differensligninger

Vi skal nå lære hvordan vi kan finne en formel for å bestemme det n 'te elementet i en tallfølge av 2. grad.

Tips: Prøv å merk deg i fremgangsmåten skritt for skritt, på samme måte som du gjør når du skal følge en bruksanvisning.

Løsning av 2. ordens differensligning

Gitt differensligningen

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} \quad \text{der } c_2 \neq 0$$

Ved å bruke c_1 og c_2 i ligningen over kan man lage en 2. gradsligning:

$$r^2 = c_1 \cdot r + c_2 \quad (\text{kan også skrives som } r^2 - c_1 \cdot r - c_2 = 0)$$

Dette polynomet kalles for **differensligningens karakteristiske polynom**. (Siden vi her har en 2. ordens differensligning blir polynomet en 2. gradsligning.)

Eksempel 1

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \rightarrow r^2 = 5r - 6 \rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$$

Eksempel 2

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \rightarrow r^2 = 2r + 3 \rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$$

Differensialligningens karakteristiske polynom skal hjelpe oss å finne løsningen av ligningen. Denne løsningen vil som sagt være en formel for å bestemme det n 'te elementet i den tallfølgen som differensligningen beskriver.

Vi må først finne løsningene (også kalt røttene) til 2.gradsligningen.

NB! Husk formelen for 2. gradsligninger:

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi får de to løsningene:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eksempel

Gitt differensligningen

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad \text{med startbetingelsene } a_0 = 1, a_1 = 3.$$

Differensligningens *karakteristisk polynom* blir:

$$r^2 = -r + 6 \text{ som er det samme som}$$

$$r^2 + r - 6 = 0$$

Løser 2. gradsligningen og får røttene r_1 og r_2 :

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$r_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad r_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$$

Anta at det karakteristiske polynomet $r^2 = c_1 \cdot r + c_2$ har to forskjellige reelle løsninger (røtter) r_1 og r_2 .

Da vil differensligningen ha følgende løsning:

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

der α og β er vilkårlige konstanter.

På dette tidspunktet kjenner a_0 og a_1 , samt r_1 og r_2 , men trenger et *ligningssett med to ligninger* for å finne de to ukjent, α og β .

Ved å velge $n = 0$ og $n = 1$ i $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ får vi:

$$n = 0: \quad a_0 = \alpha r_1^0 + \beta r_2^0 = \alpha + \beta$$

$$n = 1: \quad a_1 = \alpha r_1^1 + \beta r_2^1 = \alpha r_1 + \beta r_2$$

Dermed har vi det **ligningssettet**:

$$\alpha + \beta = a_0$$

$$\alpha r_1 + \beta r_2 = a_1$$

a_0 og a_1 er oppgitt i differensligningen, mens r_1 og r_2 , har vi funnet ved å løse det karakteristiske polynomet. Dermed er det bare to ukjente igjen, α og β . De kan vi finne ved å løse ligningssettet.

Eksempel 1

Vi forsetter med $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ der $a_0 = 1$ og $a_1 = 3$.

Vi fant røttene $r_1 = 2$ og $r_2 = -3$ og setter dem inn i den generelle løsningen:

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

og får

$$a_n = \alpha 2^n + \beta (-3)^n$$

Vi finner α og β ved å løse ligningssettet:

I. $\alpha + \beta = 1$ Husk at $a_0 = 1$

II. $\alpha 2 + \beta (-3) = 3$ Husk at $a_1 = 3$, $r_1 = 2$ og $r_2 = -3$

Utgangspunkt:

I. $3\alpha + 3\beta = 3$ Kommentar: Ganger med 3 på begge sider

II. $2\alpha - 3\beta = 3$

$$\begin{aligned} \text{I + II: } 5\alpha &= 6 & \text{Kommentar: Summerer hhv. venstresidene og høyresidene} \\ \alpha &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I: } \frac{6}{5} + \beta &= 1 & \text{Kommentar: Setter } \alpha = \frac{6}{5} \text{ i 1. ligning.} \\ \beta &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Når vi setter $\alpha = \frac{6}{5}$, $\beta = -\frac{1}{5}$, $r_1 = 2$ og $r_2 = -3$ inn i

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

får vi formelen for det n 'te leddet i tallfølgen:

$$a_n = \frac{6}{5} 2^n - \frac{1}{5} (-3)^n$$

Sjekker a_2 og ser at vi får samme svar med formelen og differensligningen:

$$\text{Formelen: } a_2 = \frac{6}{5} 2^2 - \frac{1}{5} (-3)^2 = \frac{24}{5} - \frac{9}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{Differensligningen: } a_2 = -a_1 + 6a_0 = -3 + 6 \cdot 1 = 3$$

Sjekker a_3 og ser at vi får samme svar med formelen og differensligningen:

$$\text{Formelen: } a_3 = \frac{6}{5} 2^3 - \frac{1}{5} (-3)^3 = \frac{48}{5} + \frac{27}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$\text{Differensligningen: } a_3 = -a_2 + 6a_1 = -3 + 6 \cdot 3 = -3 + 18 = 15$$

Eksempel 2 – [Fibonacci-tallene](#)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 0, a_1 = 1 \quad (\text{Startbetingelsene})$$

Differensligningen har *det karakteristisk polynomet*:

$$r^2 = r + 1 \quad \text{dvs.} \quad r^2 - r - 1 = 0$$

Løser 2. gradsligningen og får røttene::

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vi setter så disse røttene inn i den generelle løsningen

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

og får

$$a_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Vi vet at $a_0 = 0, a_1 = 1$. Dermed kan vi finne α og β ved å løse ligningssettet:

$$\text{I. } \alpha + \beta = a_0 = 0$$

$$\text{II. } \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = a_1 = 1$$

$$\text{Dette gir } \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ og } \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Løsningen og formelen for det n 'te leddet i tallfølgen blir da:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Sjekker a_2 og ser at vi får samme svare med formelen og differensligningen:

$$\begin{aligned} \text{Formelen: } a_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{4\sqrt{5}}{4} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Differensligningen: } a_2 = a_1 + a_0 = 0 + 1 = 1$$

Anta at det karakteristiske polynomet $r^2 = c_1 r + c_2$ har kun en reell løsning r (dvs. $r_1 = r_2$).

Hvis røttene er sammenfallende, dvs. $r_1 = r_2$, har det karakteristiske polynomet bare en rot.

Denne situasjonen oppstår når vi løser det karakteristiske polynomet ved hjelp av formelen for løsning av 2. grad ligninger:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

og uttrykket under rot-tegnet er lik null, dvs. $b^2 - 4ac = 0$. Da blir

$$r = \frac{-b}{2a}$$

I det karakteristiske polynomet er a alltid lik 1, så vi får:

$$r = \frac{-b}{2}$$

Den generelle løsningen av differensligningen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, \quad c_2 \neq 0$$

vil da være

$$a_n = \alpha r^n + \beta n r^n$$

Ved å velge $n = 0$ og $n = 1$ i ligningen over får vi:

$$n = 0: \quad a_0 = \alpha r^0 + \beta \cdot 0 \cdot r^0 = \alpha$$

$$n = 1: \quad a_1 = \alpha r^1 + \beta \cdot 1 \cdot r^1 = \alpha r + \beta r$$

Dermed har vi det ligningssettet vi trenger for å finne α og β :

Hvis vi kjenner a_0 og a_1 (de er gjerne oppgitt i differensligningen) kan vi finne α og β ved å løse følgende ligningssett med to ukjente:

$$\alpha = a_0$$

$$\alpha r + \beta r = a_1$$

Setter vi inn a_0 for α reduseres ligningssettet til løsningen av en ligning med kun β som ukjent:

$$a_0 r + \beta r = a_1$$

Eksempel

Gitt differensligningen

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \text{ der } a_0 = 1 \text{ og } a_1 = 4.$$

Vi får følgende *karakteristisk polynom*:

$$r^2 = 4r - 4$$

Må løse

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Dermed er det bare en løsning (rot) og $r = 2$

Den generelle løsningen blir

$$a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$$

Vi vet at $a_0 = 1$ og $a_1 = 4$ og får ligningssettet:

$$\alpha = 1$$

$$\alpha 2 + \beta 2 = 4$$

$$\alpha = 1 \quad \text{gir} \quad 2 + \beta 2 = 4 \quad \text{som videre gir} \quad \beta = 1$$

Løsningen og formelen for det n 'te leddet i tallfølgen blir:

$$a_n = 2^n + n 2^n = 2^n(n + 1)$$

Sjekker a_2 og a_3 og ser at vi får samme svar med formelen og differensligningen:

$$\text{Formelen: } a_2 = 2^2(2 + 1) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\text{Differensligningen: } a_2 = 4 \cdot a_1 - 4 \cdot a_0 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 12$$

$$\text{Formelen: } a_3 = 2^3(3 + 1) = 8 \cdot 4 = 32$$

$$\text{Differensligningen: } a_3 = 4 \cdot a_2 - 4 \cdot a_1 = 4 \cdot 12 - 4 \cdot 4 = 32$$

Vi har nå en formel for å finne *et hvilket som helst ledd i følgen*, f.eks. a_{10} :

$$a_{10} = 2^{10}(10 + 1) = 1024 \cdot 11 = 11264$$

Løsning av 1. ordens differensligning

$$a_n = c \cdot a_{n-1} + d,$$

der c og d er konstanter.

Den generelle løsningen for tilfellet der $c \neq 1$ er

$$a_n = \alpha c^n + \frac{d}{1-c}$$

Setter vi $n = 0$ får vi

$$a_0 = \alpha c^0 + \frac{d}{1-c} = \alpha + \frac{d}{1-c}$$

Løser vi ligningen over med hensyn på α får vi:

$$\alpha = a_0 - \frac{d}{1-c}$$

Her vil c , d og a_0 være gitt i differensligningen.

Eksempel

Hanois tårn, se:

<http://www.dynamicdrive.com/dynamicindex12/towerhanoi.htm>

Hvis tårnet har n skiver er det minste antall flytt som kreves for å løse denne oppgaven $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Dette er et eksempel på en differensligning av 1. grad.

$a_n = 2a_{n-1} + 1$, der $n \geq 1$ og $a_0 = 0$.

$$a_n = \alpha 2^n + \frac{1}{1-2} = \alpha 2^n - 1$$

Vi vet at $a_0 = 0$, hvilket gir oss α :

$$\alpha = a_0 - \frac{d}{1-c} = 0 - \frac{1}{1-2} = -(-1) = 1$$

Løsningen og formelen for det n 'te leddet i tallfølgen blir:

$$a_n = \alpha 2^n - 1 = 2^n - 1$$

Vi ser at dette stemmer:

Med differensligning	Med formel for a_n
$a_0 = 0$	$a_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
$a_1 = 2 \cdot a_0 + 1 = 0 + 1 = \underline{1}$	$a_1 = 2^1 - 1 = \underline{1}$

$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = \underline{\underline{3}}$	$a_2 = 2^2 - 1 = \underline{\underline{3}}$
$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = \underline{\underline{7}}$	$a_3 = 2^3 - 1 = \underline{\underline{7}}$
$a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = \underline{\underline{15}}$	$a_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = \underline{\underline{15}}$
$a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = \underline{\underline{31}}$	$a_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = \underline{\underline{31}}$
$a_6 = 2 \cdot a_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = \underline{\underline{63}}$	$a_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = \underline{\underline{63}}$
$a_7 = 2 \cdot a_6 + 1 = 2 \cdot 63 + 1 = \underline{\underline{127}}$	$a_7 = 2^7 - 1 = \underline{\underline{127}}$
Osv.	Osv.

Vi får tallfølgen: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127,, $2^n - 1$

I dette tilfellet kunne vi faktisk ha funnet formelen $2^n - 1$ ved å «nøste oss tilbake» n til 1 ved hjelp av differensligningen:

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 1 \\
 &= 2(2 \cdot a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 \cdot a_{n-2} + 2^1 + 1 \\
 &= 2^2(2 \cdot a_{n-3} + 1) + 2^1 + 1 = 2^3 \cdot a_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 1 \\
 &= 2^3(2 \cdot a_{n-4} + 1) + 2^2 + 2^1 + 1 = 2^4 \cdot a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 \\
 &\vdots \\
 &= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^1 + 2^0 \\
 &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^1 + 2^0 \\
 &= \underline{\underline{2^n - 1}}
 \end{aligned}$$

Rekursive metoder i Java:

I Java kan man lage rekursive metoder. Dette er metoder som inneholder kall på samme metode som den kallet står i.

Nedenfor ser du en rekursiv metode som finner a_n der a_n er et ledd i tallfølgen Fibonaccitallene:

```

public static int a( int n)
{
    if(n == 0) return 0;
    else if( n == 1 ) return 1;
    else return a(n-1) + a(n-2);
}

```

Nedenfor ser du en rekursiv metode som beregner det minste antall flytt som kreves for å løse problemet i Hanoi tårn, se:

<http://www.dynamicdrive.com/dynamicindex12/towerhanoi.htm>

```
public static int hanoi(int n) // beregner antall flytt
{
    if(n == 0)
        return 0;
    else
        return 2*hanoi(n-1) + 1;
}
```